

# SVILUPPO DI UNA TECNICA ROBUSTA DI PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIA PER UN VEICOLO ROBOTICO SOGGETTO A FENOMENI DI SLITTAMENTO



Università degli Studi  
**Mediterranea**  
di Reggio Calabria

## **Relatore**

Prof. Valerio Scordamaglia

## **Candidato**

Alessia Ferraro

## **Correlatore**

Ing. Vito Antonio Nardi

## INTRODUZIONE

- In questo lavoro di tesi è proposta una soluzione al problema di pianificazione di traiettoria per un robot cingolato a guida differenziale, controllato da remoto soggetto a fenomeni di scivolamento e slittamento.
- Ricorrendo alla teoria dei Networked Control Systems è stato formulato il modello matematico del sistema, portando in conto il ritardo legato alla trasmissione dei dati all'interno del loop di controllo.
- É stato progettato un regolatore stabilizzante ricorrendo alla teoria del Controllo Vincolato capace di portare in conto vincoli dinamici e di attuazione.
- E' stato quindi implementato un algoritmo di pianificazione di traiettoria, la cui ammissibilità è garantita tramite da una procedura basata su considerazioni set-based.
- Per verificare l'efficacia della soluzione proposta è stata condotta una campagna di prove numeriche e sperimentali utilizzando il robot Jaguar v4 della Dr Robot.

Parte di questo lavoro è stato presentato alla ventitreesima edizione della conferenza internazionale IEEE MMAR tenutasi a Miedzizdroje, Polonia.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>V. A. Nardi, A. Ferraro and V. Scordamaglia, "Feasible Trajectory Planning Algorithm for a Skid-Steered Tracked Mobile Robot Subject to Skid and Slip Phenomena", 23rd International Conference on Methods & Models in Automation & Robotics (MMAR). IEEE, 2018. p. 120-125.

## MODELLO MATEMATICO

- Sia  $q = [x \ y \ \theta]^T$  il vettore di coordinate del robot nel sistema di riferimento inerziale  $\mathbf{E}$ .
- Il modello cinematico non lineare è

$$\dot{q} = G(q) \cdot J \cdot H(\mu) \cdot J^{-1} \cdot u = f(q, \mu, u) \quad (1)$$

con

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} R/2 & R/2 \\ R/d & -R/d \end{bmatrix} \quad H(\mu) = \begin{bmatrix} \mu_R & 0 \\ 0 & \mu_L \end{bmatrix} \quad (2)$$

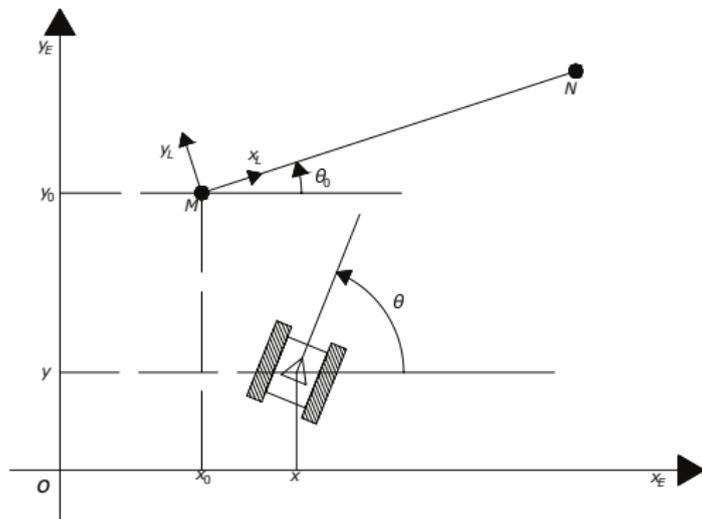
- $R$  raggio delle ruote dei cingoli e  $d$  distanza fra i cingoli.
- Gli effetti di scivolamento e slittamento sperimentati dal veicolo possono essere modellati attraverso due coefficienti adimensionali dipendenti dal terreno  $\mu_R$  e  $\mu_L$  rispettivamente per il cingolo destro e sinistro.
- $u = [V \ \omega]^T$  con  $V$  ( $\omega$ ) velocità di avanzamento (rotazione) impressa.

- Si consideri il sistema di riferimento locale **L** e  $q_0 = [x_0 \quad y_0 \quad \theta_0]^T$ .
- Vale la seguente trasformazione da **E** a **L**

$$q_L = R_E^L(\theta_0) \cdot (q - q_0) \quad (3)$$

con

$$R_E^L(\theta_0) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_0) & \sin(\theta_0) & 0 \\ -\sin(\theta_0) & \cos(\theta_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$



I sistemi di riferimento **E** e **L**, centrati in  $O$  e  $M$  rispettivamente.

## NOTAZIONE

- Sia

$$T^D(\cdot) = [q^D(\cdot) \quad u^D(\cdot)] \quad (5)$$

la traiettoria desiderata espressa nel sistema di riferimento  $\mathbf{L}$ .

- $T^D(\cdot)$  è definita sotto forma di coppie ammissibili di stati e azioni di controllo che soddisfano i vincoli non olonimi (1) lungo la finestra temporale  $[0, \hat{t}]$  tale che  $q^D(0) = [0 \quad 0 \quad 0]$  e  $u^D(t) = [V^D \quad 0]$ .
- $V^D$  è la velocità di avanzamento nominale del robot.
- La posa desiderata all'istante  $t \in [0, \hat{t}]$  è indicata come:

$$q^D(t) = [V^D \cdot t \quad 0 \quad 0]^T \quad (6)$$

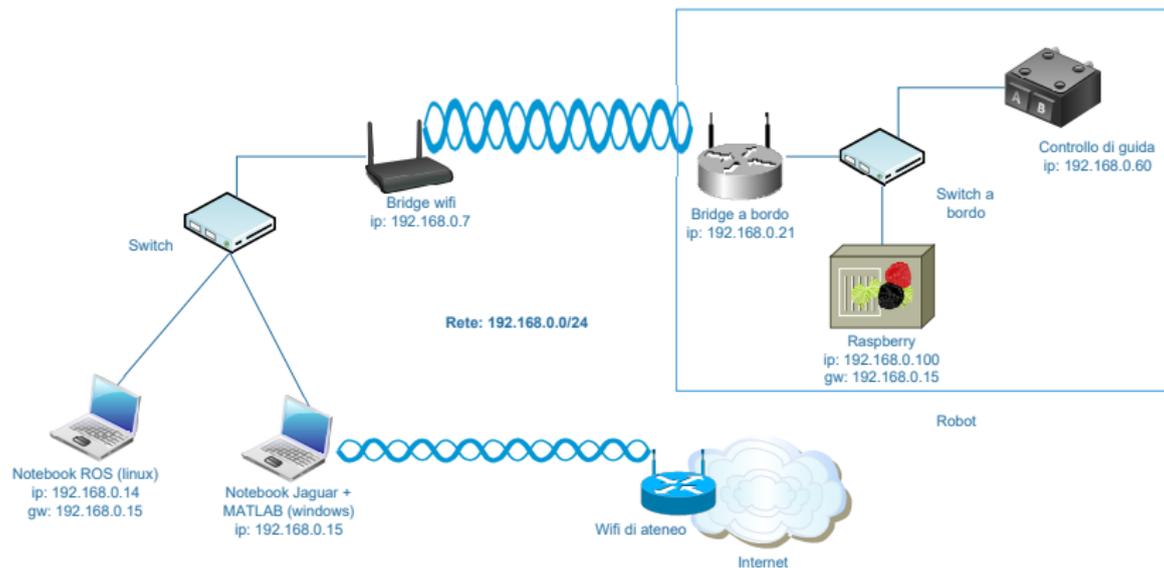
## RAPPRESENTAZIONE LTI DISCRETA

- Sfruttando le classiche procedure di linearizzazione e discretizzazione l'errore d'inseguimento può essere espresso mediante il seguente sistema lineare tempo-invariante:

$$e(t_{k+1}) = Ae(t_k) + B\delta u(t_k) + B_D d(t_k) \quad (7)$$

con  $e = q - q^D$ ,  $\delta u = u - u^D$ ,  $d = \mu - \mu^D$ , dove  $\mu^D$  è il valore nominale dei coefficienti d'attrito.

## SET-UP SPERIMENTALE



Framework di controllo

## SET-UP SPERIMENTALE

### PROBLEMATICHE

La presenza di una rete di comunicazione su canale wireless all'interno del loop di controllo può causare le seguenti problematiche:

- Imperfezioni di comunicazione e ritardi temporali
- Perdita di pacchetti

Conseguenza: un peggioramento della performance a ciclo chiuso, nel peggiore dei casi instabilità.

### NETWORKED CONTROL SYSTEMS

Ricorrendo agli argomenti proposti dalla teoria dei Networked Control Systems, il sistema (7) può essere riscritto in termini di modello lineare discreto politopico con  $N_v$  vertici per portare in conto possibili ritardi di trasmissione interni al loop di controllo.

$$e(t_{k+1}) = A_j e(t_k) + B_j \delta u(t_k) + B_{D_j} d(t_k) \quad (8)$$

con  $j = 1 \dots N_v$ .

## SINTESI DEL CONTROLLO PER L'INSEGUIMENTO DI TRAIETTORIA

## VINCOLI

Data la rappresentazione LTI (8) sono definiti i seguenti vincoli ellissoidali:

$$e(t) \in \Omega_e, \quad \Omega_e \triangleq \{e \in \mathcal{R}^n : e^T e \leq e_{max}^2\} \quad (9)$$

$$\delta u(t) \in \Omega_u, \quad \Omega_u \triangleq \{\delta u \in \mathcal{R}^2 : \delta u^T \delta u \leq u_{max}^2\} \quad (10)$$

per esempio, un vincolo sulla velocità di rotazione massima può essere espresso come:

$$-2.15 \leq \omega \leq 2.15[\text{rad/s}] \rightarrow \begin{bmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \end{bmatrix} \leq 4.6225$$

## CONSTRAINED CONTROL PROBLEM (CCP)

Dato (8) si trovi una retroazione di stato  $\delta u(\cdot) = K \cdot e(\cdot)$  che soddisfi i vincoli assegnati (9)-(10) per ogni realizzazione del disturbo esterno  $d \in \Omega_D$  con

$$\Omega_D \triangleq \{d \in \mathcal{R}^2 : d^T d \leq d_{max}^2\} \quad (11)$$

## SOLUZIONE DEL CCP

- 1 si calcoli  $\delta u(\cdot) = Ke(\cdot)$  che soddisfi (9) e (10) all'interno della regione positiva invariante <sup>a</sup>

$$\Gamma_0 = \{e \in \mathcal{R}^n : e^T P_0 e \leq 1 \quad P_0 \geq 0\} \quad (12)$$

- 2 si definisca il sottoinsieme  $d$ -invariante <sup>b</sup>

$$\Gamma_\infty = \{e \in \mathcal{R}^n : e^T P_\infty e \leq 1 \quad P_\infty \geq 0\} \subseteq \Gamma_0 \quad (13)$$

tale che

$$e(t_k) = \Phi_j^k e(t_0) + \sum_{h=0}^{k-1} \Phi_j^{k-1-h} B_{Dj} d_h \in \Gamma_0$$

$\forall e(t_0) \in \Gamma_\infty$  and  $\forall d(\cdot) \in \Omega_D$  dove

$$e(t_{k+1}) = \Phi_j e(t_k) + B_{Dj} d(t_k) \quad (14)$$

è la dinamica a ciclo chiuso dell'errore  $\Phi_j = (A_j + B_j \cdot K)$ .

## NOTA

Tale procedura in due passi fornisce, se esiste, una soluzione  $(K, \Gamma_\infty)$  del **CCP** in termini di un'azione di controllo  $\delta u(\cdot) = Ke(\cdot)$  all'interno della (13) che soddisfa i vincoli assegnati (9), (10) per ogni  $d \in \Omega_D$ .

<sup>a</sup>V. Kothare, V. Balakrishnan, and M. Morari, "Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities," vol. 32, 02 1996

<sup>b</sup>I. Kolmanovsky and E. G. Gilbert, "Theory and computation of disturbance invariant sets for discrete time linear systems," *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 4, no. 4, pp. 317–367, 1998

# ALGORITMO DI PIANIFICAZIONE DEL MOVIMENTO

## IPOTESI

- Si supponga di aver trovato una soluzione del *CCP* sotto forma di  $(K, \Gamma_\infty)$ .
- Si consideri lo scenario bidimensionale  $\Delta \subseteq \mathcal{R}^2$ .
- $\Delta$  è stato discretizzato e i punti così ottenuti sono stati usati come nodi di un grafo  $\mathcal{G}$ .

## $\Delta$ -COMPATIBILITÀ

Definizione preliminare:

Due nodi  $E_1 = (x_1, y_1) \in V$  e  $E_2 = (x_2, y_2) \in V$  sono  $\Delta$ -compatibili se  $\forall \alpha \in [0, 1]$

$$P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \in \Delta$$

con  $x_\alpha = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2$  e  $y_\alpha = \eta_\alpha x_\alpha + \tau_\alpha$  dove  $\eta_\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  e  $\tau_\alpha = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}$

Ed inoltre

$$d(E_1, E_2) \leq \bar{d}$$

con  $d(E_1, E_2)$  distanza fra due noi e  $\bar{d}$  un valore positivo opportunamente scelto.

## ARCHI DEL GRAFO $\mathcal{G}$

- Siano  $A, B \in V$  due nodi  $\Delta$ -compatibili.
- L'arco congiungente  $A$  e  $B$  è definito come

$$T^{AB}(\cdot) = [q^{AB}(\cdot) \quad \tilde{u}^{AB}] \quad (15)$$

Tale definizione avviene in un sistema locale centrato in  $A$  tale che  $B$  appartenga al semiasse  $x$  positivo del robot, essa rappresenta la traiettoria che percorre il segmento  $\bar{A}B$  alla velocità di avanzamento costante  $V_{AB}$  per  $N_{AB}$  istanti di campionamento, con  $q^{AB}(t) = [V_{AB} \cdot t \quad 0 \quad 0]$  e  $\tilde{u}^{AB} = [V_{AB} \ 0]^T$  soluzione di (1) su un orizzonte temporale  $t \in [0, T_s \cdot N_{AB}]$ .

$N_{AB}$  è il più grande intero positivo tale che

$$N_{AB} \leq \frac{d_{AB}}{V_{AB} \cdot T_s} \quad (16)$$

## COSTO DEGLI ARCHI

- Il costo dell'arco è posto pari a  $d_{AB}$  la lunghezza del segmento  $\bar{A}B$ .

## ALGORITMO DI PIANIFICAZIONE DI MOVIMENTO

- Dati tre nodi  $A, B, C \in V$  si supponga che le coppie  $A, B$  e  $B, C$  siano entrambe  $\Delta$ -compatibili. Per percorrere una traiettoria che includa i segmenti  $T^{AB}$  e  $T^{BC}$  il robot deve compiere uno switch da  $T^{AB}$  a  $T^{BC}$  all'istante  $t_{N_{AB}} = T_s \cdot N_{AB^-}$
- Lo switch è ammissibile se la seguente condizione è verificata:

$$(e(t_{N_{AB}}) + \Pi) \in \Gamma_\infty \quad (17)$$

dove  $e(t_{N_{AB}})$  è l'errore di inseguimento all'istante di switch e

$$\Pi = [x_B - x^D(t_{N_{AB}}) \quad y_B - y^D(t_{N_{AB}}) \quad \delta_\theta]^T \quad (18)$$

- Una traiettoria è ammissibile se lo è ognuno degli switch fra gli archi che la compongono.
- L'ammissibilità è garantita da una procedura di verifica basata su considerazioni set-based.

## NOTA

- L'intera procedura può essere convertita in un algoritmo ricorsivo basato sulla soluzione di un problema di minimizzazione SDP.

## RISULTATI NUMERICI

### SPECIFICHE DEL ROBOT

Nelle prove sperimentali è stato considerato un robot con raggio delle ruote  $R = 8cm$  e una distanza fra i cingoli  $d = 50cm$ . Sono stati presi in considerazione i seguenti vincoli:

**A** coefficienti di attrito all'interno dell'intervallo

$$\mu_R, \mu_L \in (0.7, 1.2) \quad (19)$$

**B** velocità di avanzamento e rotazione appartenenti agli intervalli:

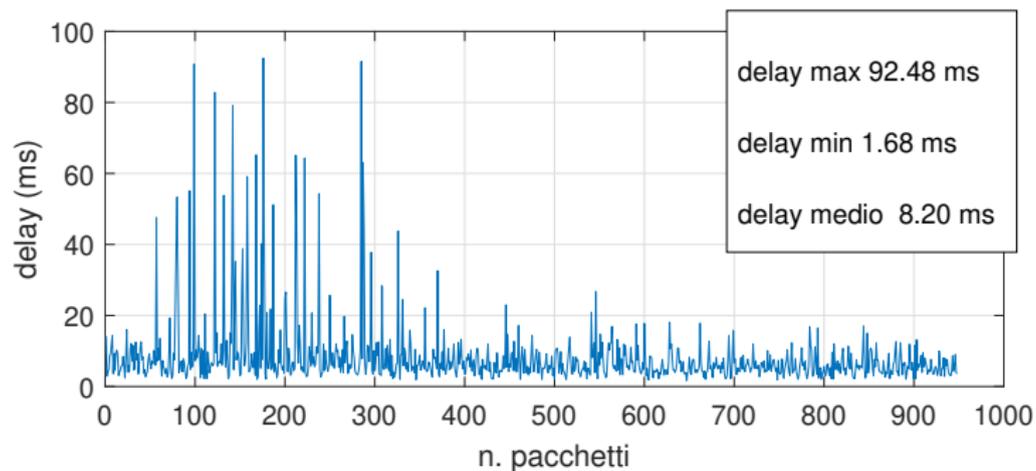
$$0 \leq V \leq 0.4 \text{ [m/s]} \quad (20)$$

$$-0.6 \leq \omega \leq 0.6 \text{ [rad/s]} \quad (21)$$

### IPOTESI

- Il dominio bidimensionale  $\Delta$  è stato discretizzato con una grigliatura regolare di  $0.2m$  ottenendo 270 nodi.
- La massima lunghezza degli archi considerati per costruire  $\mathcal{G}$  è stata di  $\bar{d} = 0.5m$ .
- La velocità di avanzamento nominale è stata pari a  $V^D = 0.2 \text{ [m/s]}$ .

# RISULTATI NUMERICI

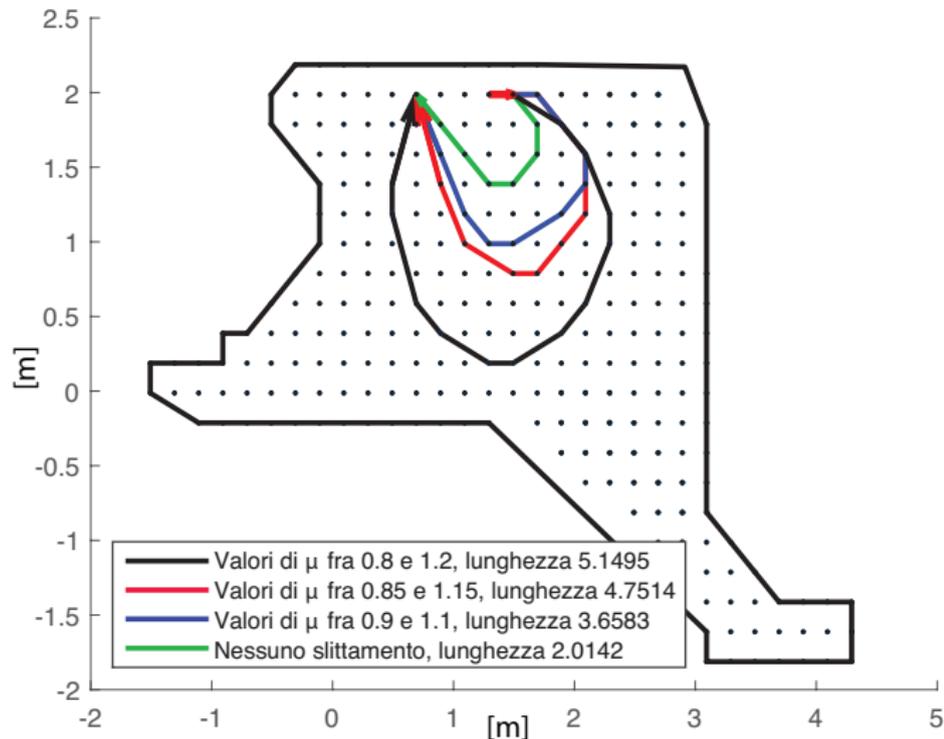


Delay misurato all'interno del loop di controllo

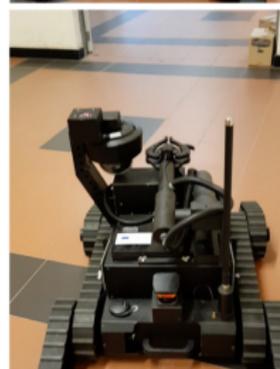
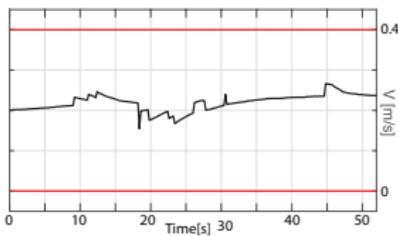
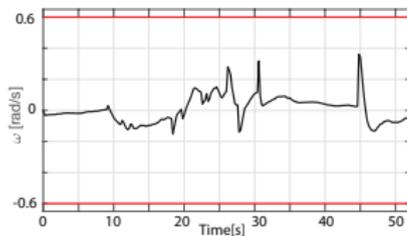
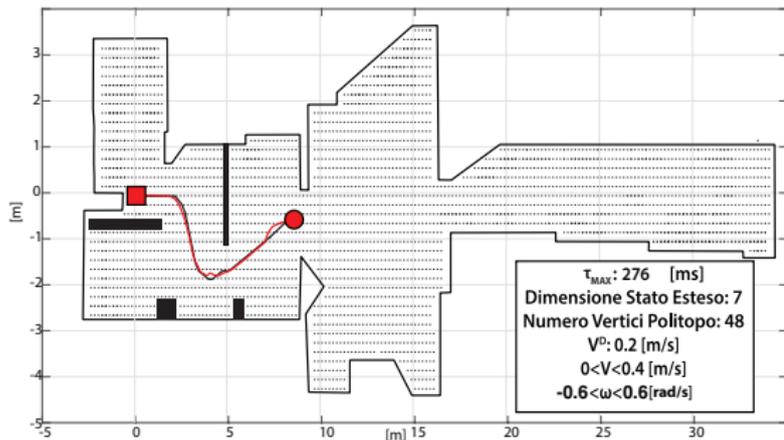
## MODELLO POLITOPICO

- Dimensione dello stato esteso  $n = 7$
- Numero vertici del politopo  $N_v = 48$

## ANALISI DI SENSITIVITÀ ALLO SLITTAMENTO



## SIMULAZIONI SPERIMENTALI



## CONCLUSIONI

- In questo lavoro di tesi è proposta una soluzione al problema della pianificazione di traiettoria per un robot a guida differenziale, controllato da remoto, soggetto a fenomeni di slittamento e scivolamento;
- E' stato costruito il modello politopico del sistema utilizzando la teoria dei Networked Control Systems al fine di portare in conto il ritardo di trasmissione all'interno del loop di controllo.
- È stata sintetizzata una retroazione stabilizzante per effettuare l'inseguimento di traiettoria tenendo conto dei vincoli sull'azione di controllo e sull'errore d'inseguimento, basandosi sulla teoria del Controllo Vincolato.
- Con lo scopo di individuare una traiettoria ottima ammissibile, costituita da una successione di segmenti da percorrere a una data velocità nominale, è stato sviluppato un opportuno algoritmo di pianificazione.
- L'ammissibilità è stata garantita attraverso una procedura *set-based* che implica la soluzione di un problema di minimizzazione SDP.
- Per verificare l'efficacia della soluzione proposta è stata infine condotta una campagna di prove numeriche e sperimentali.

# SVILUPPO DI UNA TECNICA ROBUSTA DI PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIA PER UN VEICOLO ROBOTICO SOGGETTO A FENOMENI DI SLITTAMENTO



Università degli Studi  
**Mediterranea**  
di Reggio Calabria

## **Relatore**

Prof. Valerio Scordamaglia

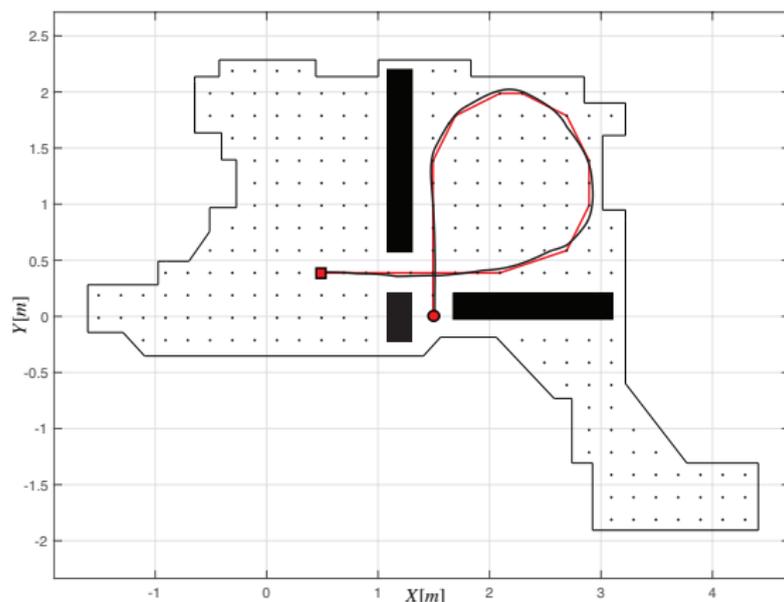
## **Candidato**

Alessia Ferraro

## **Correlatore**

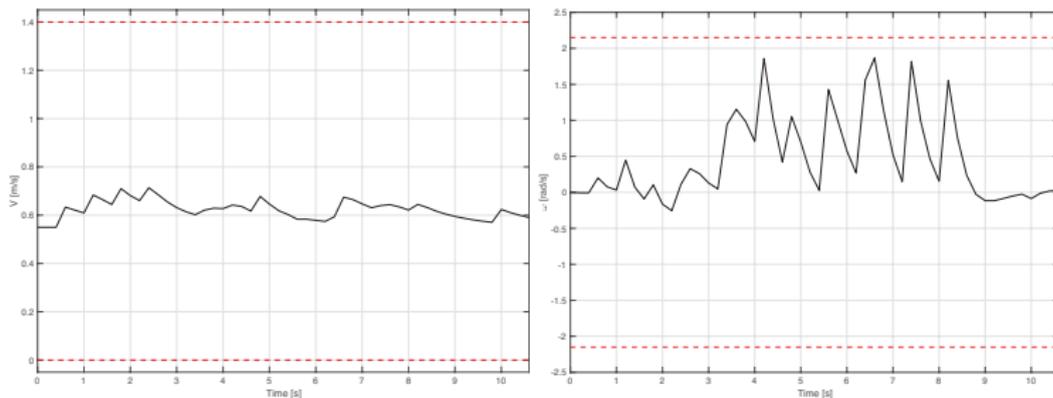
Ing. Vito Antonio Nardi

## EXTRA SLIDE: SIMULAZIONI NUMERICHE

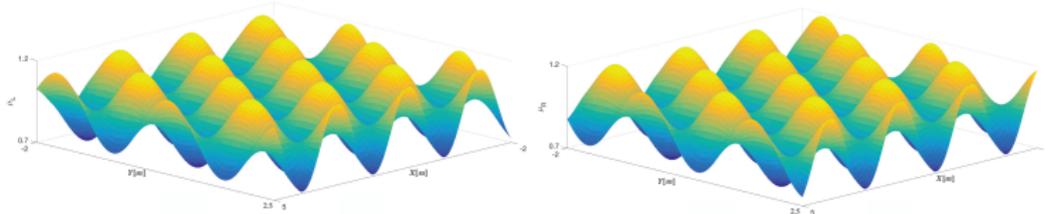


- Gli ostacoli sono rappresentati dai rettangoli neri.
- In rosso i 14 segmenti della traiettoria ottima calcolata, con una lunghezza complessiva di circa 6.5m.
- In questo scenario è necessario che il robot compia una manovra circolare al fine di poter eseguire una curva di 90 deg.

# EXTRA SLIDE: SIMULAZIONI NUMERICHE

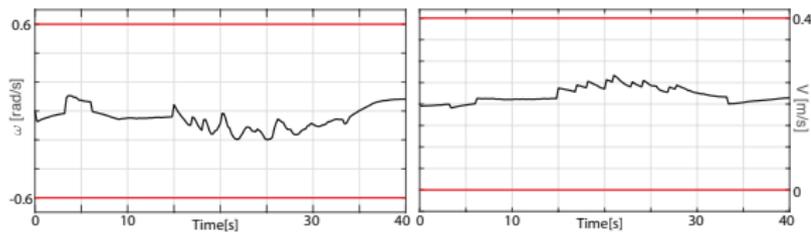
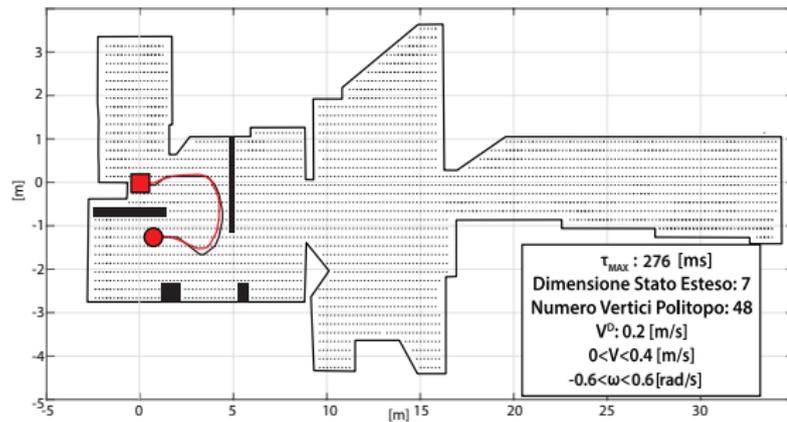


Robot forward and angular velocities.



Robot forward and angular velocities.

# EXTRA SLIDE: SIMULAZIONI SPERIMENTALI



## CONTROLLO VINCOLATO

La soluzione del problema di controllo vincolato può essere ottenuta risolvendo il seguente problema di ottimizzazione soggetto a vincoli LMI:

$$\min_{\gamma, Y, Q} \gamma \quad (22)$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & e(k|k)^T \\ e(k|k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA_j^T + Y^T + B_j^T & QR_x^{1/2} & Y^T R_u^{1/2} \\ * & Q & * & * \\ * & * & \gamma I & * \\ * & * & * & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (24)$$

con  $j = 1 \dots N_v$

$$\begin{bmatrix} Q & * \\ QR_x^{1/2} & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} U & Y \\ * & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (25)$$

La matrice di retroazione di stato è  $K = YQ^{-1}$  e la regione robusta positivamente invariante è:

$$\Gamma_0 = \{e \in \mathbb{R}^{n \times n} : e^T P_0 e \leq 1\} \quad (26)$$

con  $P_0 = Q^{-1}$ .

## CALCOLO DELL'INSIEME D-INVARIANTE

Nell'ottica di ottenere la scalatura ottimale  $\Gamma_\infty$  dell'insieme ellissoidale positivamente invariante  $\Gamma_0 \forall d^T d \leq d_{max}^2$

$$e(t_1)^T P_0 e(t_1) \leq 1 \quad (27)$$

⋮

$$e(t_{\bar{N}})^T P_0 e(t_{\bar{N}}) \leq 1$$

con  $e(t_k) = \Phi_{k,j} e_0 + J_{k,j} d$ . Essendo  $\bar{N}$  l'orizzonte temporale massimo di interesse. La soluzione del problema (27) può essere riscritta nella seguente forma

$$\min_{\tau, \gamma_D} -\gamma_D \quad (28)$$

$$1 - \tau d_{max}^2 - \gamma_D \geq 0 \quad 0 \leq \gamma_D \leq 1 \quad \tau > 0 \quad (29)$$

$$-J_{k,j}^T P_0 J_{k,j} + \tau I \geq 0 \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} P_0 - \Phi_{k,j}^T P_0 \Phi_{k,j} & \Phi_{k,j}^T P_0 J_{k,j} \\ * & -J_{k,j}^T P_0 J_{k,j} + \tau I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

con  $j = 1, \dots, N_v$ ,  $k = 1, \dots, \bar{N}$  dove  $\Phi_{k,j} = \Phi_j^k$  e

$$J_{k,j} = [\Phi_{k-1,j} B_{D,j} \quad \Phi_{k-2,j} B_{D,j} \quad \dots \quad B_{D,j}]$$

Risolto il problema di minimizzazione (28)-(38) si ottiene  $P_\infty = \gamma_D^{-1} P_0$ .

## LEMMA 1

Nota la dinamica a ciclo chiuso si supponga che l'errore d'inseguimento all'istante di salto sia  $e(t_0) \in S_A$  con

$$S_A = \{e \in \Gamma_\infty : e^T P_A e \leq 1 \quad P_A \geq 0\} \quad (32)$$

L'insieme ellissoidale

$$S_{N_{AB}} = \{e \in \Gamma_\infty : e^T \Psi e \leq 1 \quad \Psi \geq 0\} \quad (33)$$

rappresenta l'insieme di tutti gli errori d'inseguimento  $e(t_{N_{AB}})$  ammissibili per ogni realizzazione del disturbo  $d(\cdot) \in \Omega_D$  all'istante  $t_{N_{AB}}$ . Esso può essere ottenuto risolvendo il seguente problema di minimizzazione SDP:

$$\min_{\tau_1, \tau_2, \tilde{\gamma}} \tilde{\gamma} \quad (34)$$

$$0 \leq \tilde{\gamma} \leq 1 \quad (35)$$

$$\tau_1 \geq 0 \quad \tau_2 \geq 0 \quad (36)$$

$$\tilde{\gamma} - \tau_1 d_{max}^2 - \tau_2 \geq 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi}_j^T P_\infty \bar{\Phi}_j + \tau_2 P_A & \bar{\Phi}_j^T P_\infty \bar{\Phi}_j \\ * & -\bar{J}_j^T P_\infty \bar{J}_j + \tau_1 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (38)$$

con  $\bar{\Phi}_j = \Phi_{N_{AB},j}$ ,  $\bar{J}_j = [\Phi_{N_{AB}-1,j} B_{D,j} \quad \Phi_{N_{AB}-2,j} B_{D,j} \quad \cdots \quad B_{D,j}] e$

$$\Psi = \tilde{\gamma}^{-1} P_\infty$$

### COSTO COMPUTAZIONALE

- Il costo dell'algoritmo è quello dell'algoritmo di ottimizzazione  $A^*$ .
- **É abbastanza oneroso dal punto di vista computazionale nonostante la stima di un'euristica ci permetta di evitare determinati percorsi.**
- Non tiene conto di ostacoli non noti a priori presenti nell'ambiente, questo è ciò che ha permesso di demandare la fase di pianificazione di traiettoria a un'unità di calcolo remota.
- **I problemi SDP sono particolari problemi di ottimizzazione convessa. Con funzione di costo lineare e nel nostro caso vincoli esprimibili mediante Disequazioni Lineari di Matrici.**

## KEY POINTS AND NOVELTY

- Il problema di navigazione è stato affrontato attraverso un approccio set based.
- L'approccio set-based è stato realizzato attraverso la soluzione di problemi SDP.
- Ricorrendo alla teoria dei Networked Control Systems è stato formulato il modello matematico del sistema, portando in conto il ritardo legato alla trasmissione dei dati all'interno del loop di controllo.
- Grazie all'utilizzo della formulazione del problema di controllo vincolato per mezzo di LMI si è ottenuto un framework modulare che mette a disposizione strumenti utilizzabili in altri contesti, quali droni in ambiente indoor o veicoli acquatici
- L'approccio utilizzato offre un ulteriore elemento di modularità rispetto alla tipologia di rappresentazione, sarà per esempio possibile utilizzare rappresentazioni incerte con incertezza norm-bounded.
- Le prove simulative hanno utilizzato dati realistici, riferiti a una specifica tipologia di veicolo.

## $A^*$ – like

- È stato usato  $A^*$  – like per cercare il percorso più breve sotto forma di una successione di archi che collegano il nodo di partenza  $V_0 \in V$  e quello di destinazione  $V_F \in V$ .
- L'algoritmo  $A^*$  è un classico approccio di ricerca del percorso ottimo in un grafo. La scelta dei nodi da esplorare segue una stima euristica del costo minimo del percorso che include i nodi da esplorare.
- L' $A^*$  garantisce l'esplorazione di un numero di nodi inferiore a ogni altro algoritmo che usi la stessa euristica. L'euristica si compone di due termini: il costo del percorso già compiuto e la distanza euclidea fra il nodo da esplorare e quello di destinazione.
- Ogni volta che un percorso raggiunge il nodo di destinazione la sua lunghezza diventa il valore massimo dell'euristica oltre il quale un percorso smette di essere esplorato.