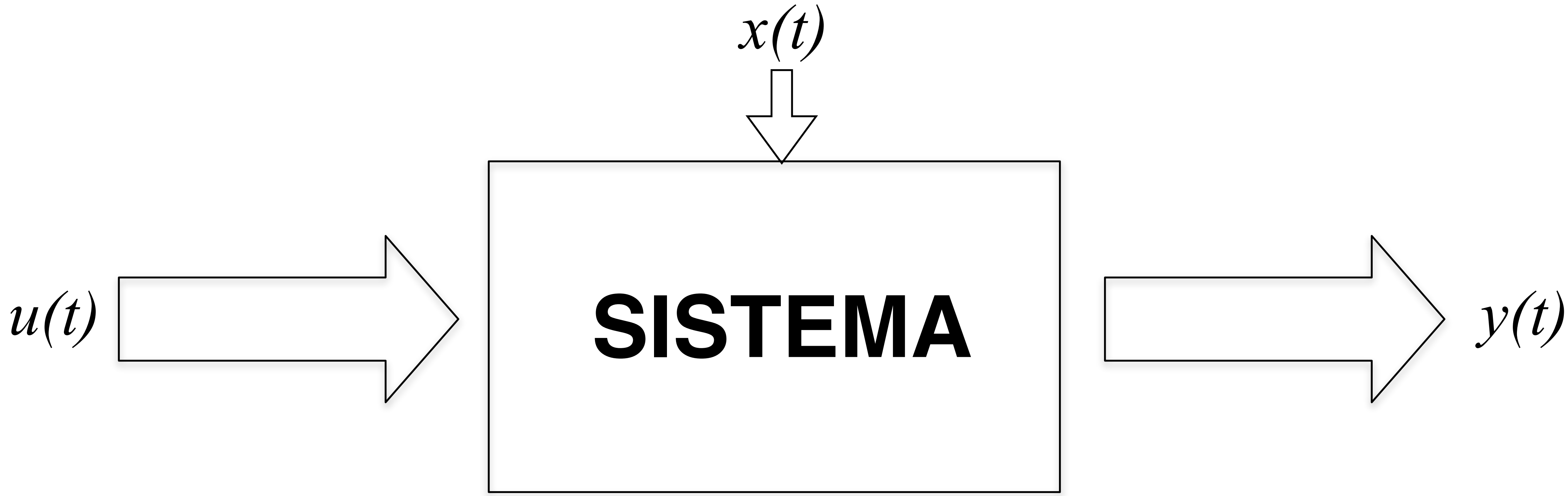


Automatica

A.A. 2023/2024

CALCOLO RAPPRESENTAZIONE ISU PER SISTEMI MECCANICI

SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO

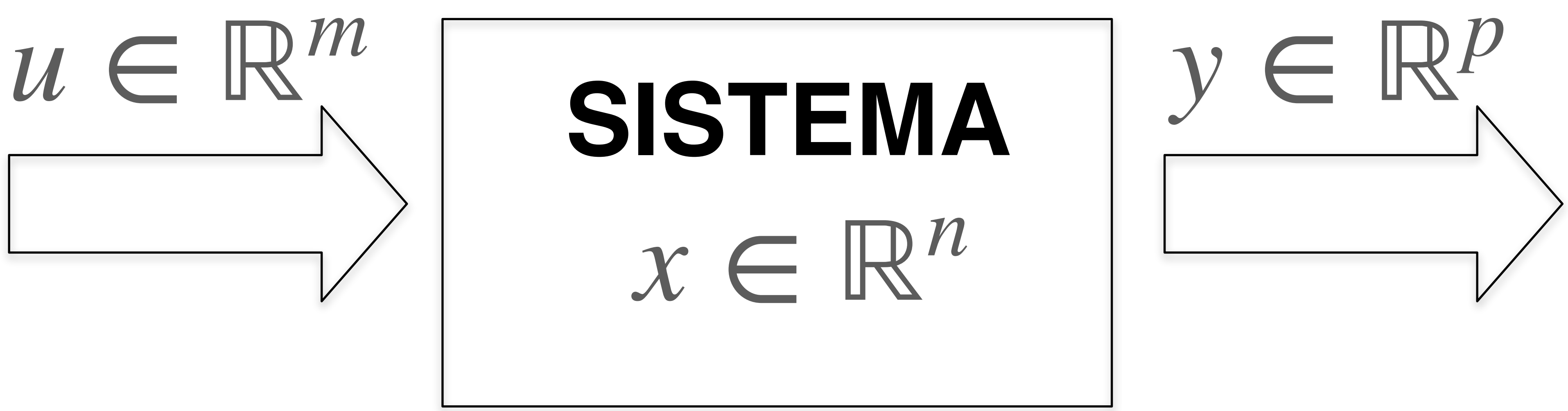


- ***x è detto vettore delle variabili di stato che descrivono la situazione interna del SISTEMA***

Rappresentazione ISU

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \qquad x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

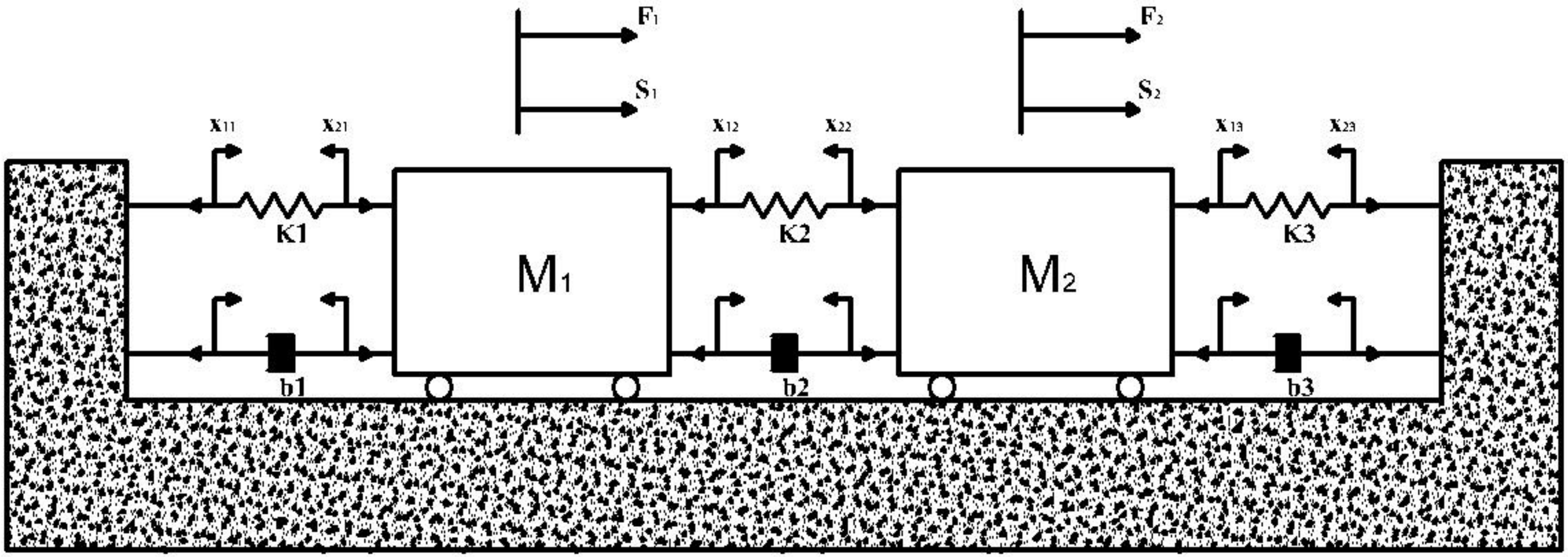
CLASSIFICAZIONE



- Un Sistema Lineare e Tempo Invariante è detto LTI ed ha la seguente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (4)$$

ESEMPIO INTRODUTTIVO



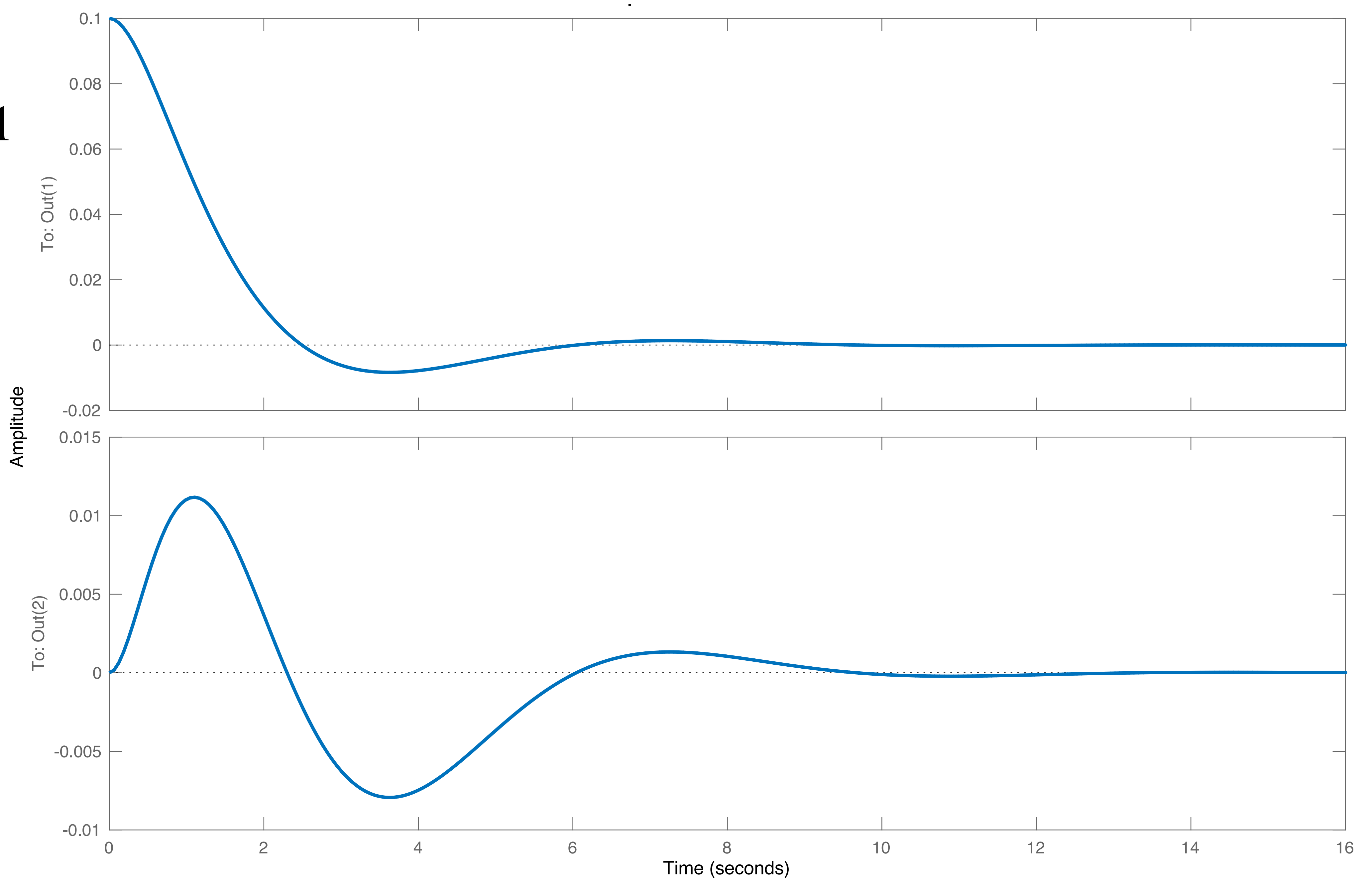
ESEMPIO INTRODUTTIVO

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{M_1} & -\dfrac{b_1+b_2}{M_1} & \dfrac{k_2}{M_1} & \dfrac{b_2}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{M_2} & \dfrac{b_2}{M_2} & -\dfrac{k_2+k_3}{M_2} & -\dfrac{b_2+b_3}{M_3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{M_2} \end{bmatrix} F \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x
\end{cases}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0}
$$

ESEMPIO INTRODUTTIVO

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1$$
$$b_1 = b_2 = b_3 = 1$$
$$M_1 = M_2 = 1$$



$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

MODELLISTICA MECCANICA

MODELLISTICA MECCANICA: ELEMENTO DI INERZIA

- Elemento di Inerzia: Massa o Momento di Inerzia
  - L'inerzia puo' essere definita come la forza (coppia) necessaria per ottenere una variazione unitaria di accelerazione (accelerazione angolare)

$$Massa = \frac{Forza}{Accelerazione} = \frac{[N]}{[m/s^2]} = [kg]$$

$$Momento\,Inerzia = \frac{Coppia}{Accel.\,Angolare} = \frac{[Nm]}{[rad/s^2]} = [kgm^2]$$

MODELLISTICA MECCANICA: ELEMENTO DI INERZIA

- Richiami Fisica: Calcolo Momento di Inerzia

- **Def.** Il momento di inerzia J_t di un corpo puntiforme di massa *m* rispetto all'asse di rotazione *t* è definito come

$$J_t = m \cdot r^2$$

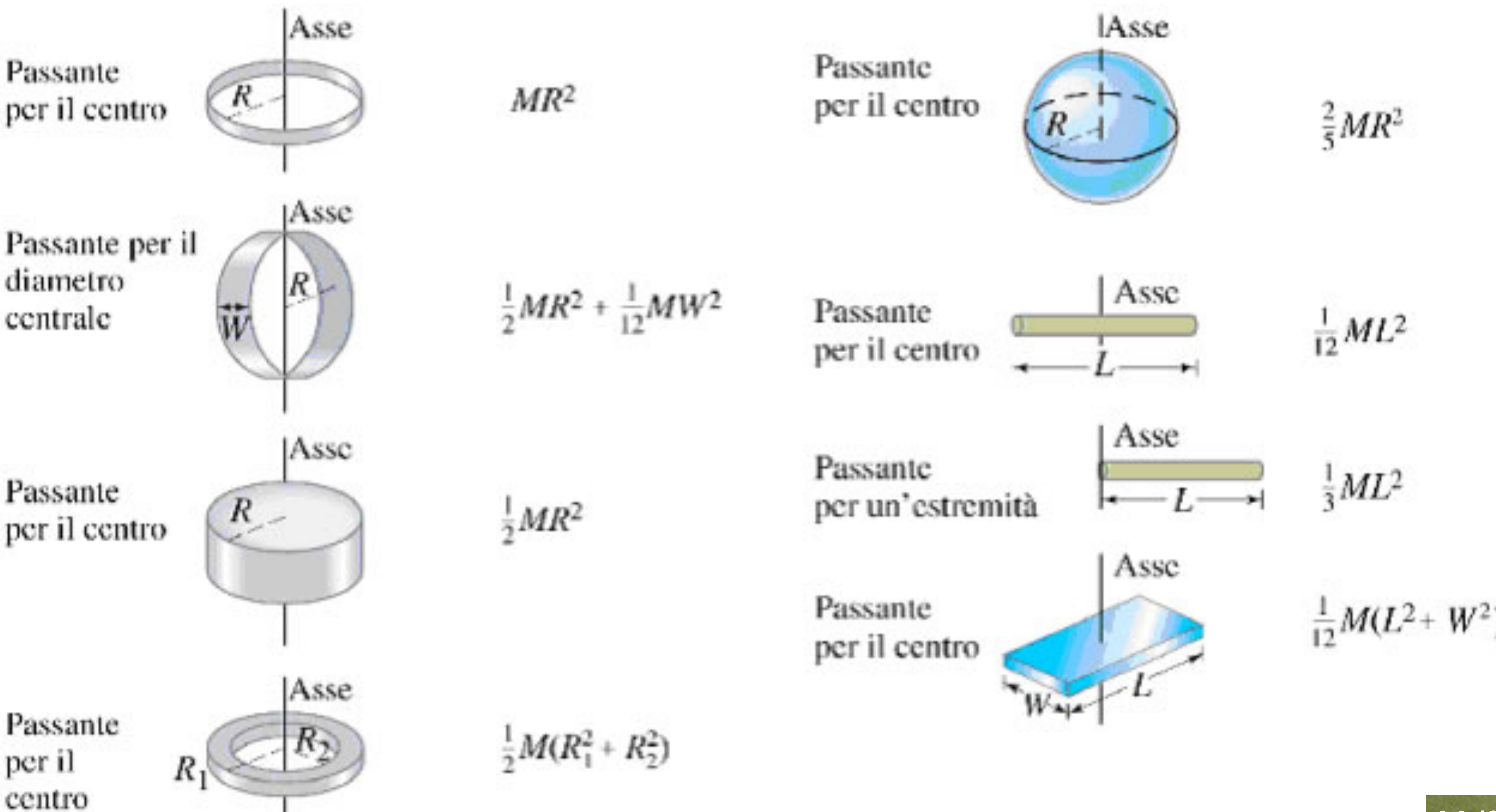
- **Def.** Il momento di inerzia J_C di un corpo rigido *C* rispetto all'asse di rotazione *t* è definito come

$$J_C = \int_C r^2 \cdot dm$$

essendo *dm* un elemento infinitesimo di massa del corpo rigido *C* distante *r* dall'asse di rotazione *t*

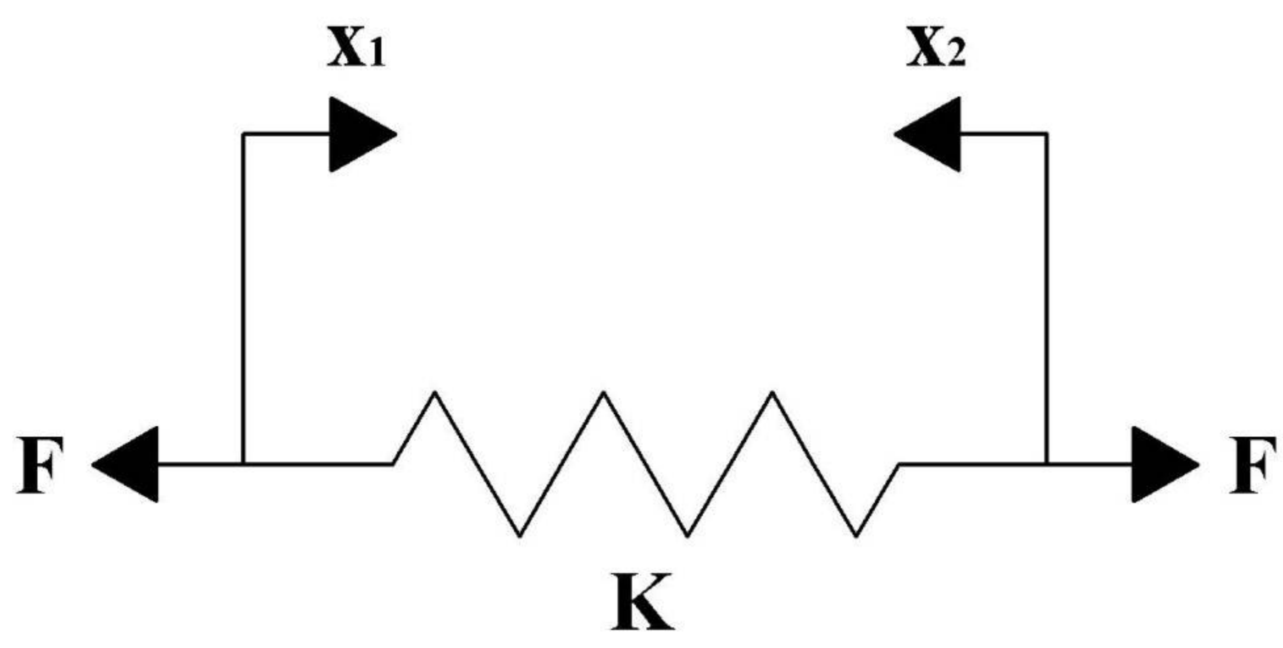
MODELLISTICA MECCANICA: ELEMENTO DI INERZIA

- Tabella Momenti di Inerzia



MODELLISTICA MECCANICA:ELEMENTO ELASTICO

- Elemento Elastico: Molla
  - **<u>Def.</u>** Elemento meccanico privo di massa e di attrito. La deformazione dell'elemento elastico genera una reazione direttamente proporzionale alla deformazione
  - Siano x_1 ed x_2 gli estremi della molla. K è detta costante elastica della molla .

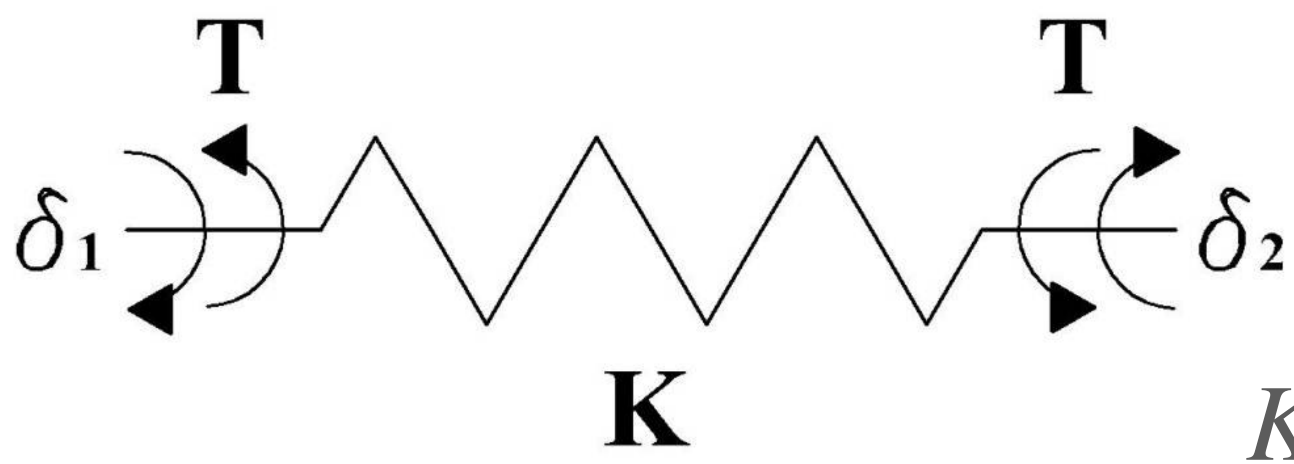


$$F = K \cdot (x_1 + x_2)$$

$$K = \frac{Forza}{Deformazione} = \frac{[N]}{[m]}$$

MODELLISTICA MECCANICA:ELEMENTO ELASTICO

- Elemento Elastico: Molla Torsionale
  - **<u>Def.</u>** Elemento meccanico privo di massa e di attrito. La deformazione dell'elemento elastico genera una reazione direttamente proporzionale alla deformazione
  - Siano δ_1 ed δ_2 le deformazioni torsionali agli estremi della molla. *K* è detta costante elastica della molla.

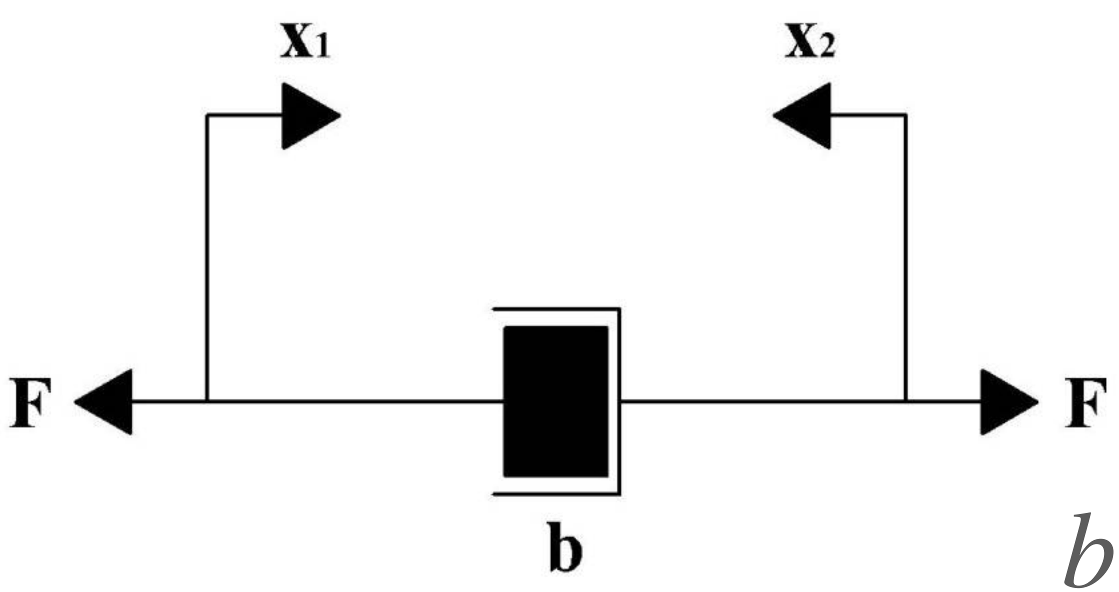


$$F = K \cdot (\delta_1 + \delta_2)$$

$$K = \frac{Coppia}{Deformazione} = \frac{[Nm]}{[rad]}$$

MODELLISTICA MECCANICA:ELEMENTO ATTRITO

- Elemento Attrito: Smorzatore
  - **Def.** Elemento meccanico privo di massa e di elasticità. La deformazione dell'elemento attrito genera una reazione direttamente proporzionale alla velocità
  - Siano x_1 ed x_2 gli estremi della molla. b è detto coefficiente di attrito dello smorzatore.

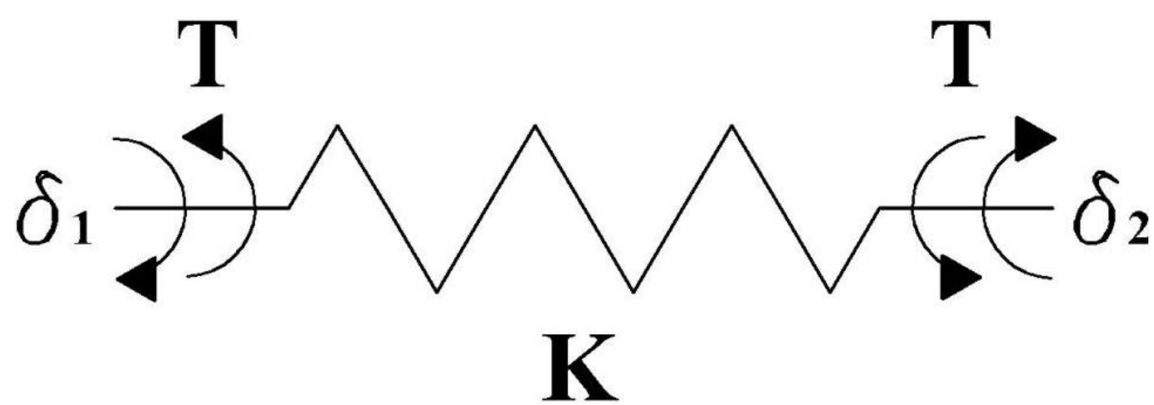


$$F = b \cdot (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)$$

$$b = \frac{Forza}{Vel\,.\,Deformazione} = \frac{[N]}{[m/s]}$$

MODELLISTICA MECCANICA:ELEMENTO ATTRITO

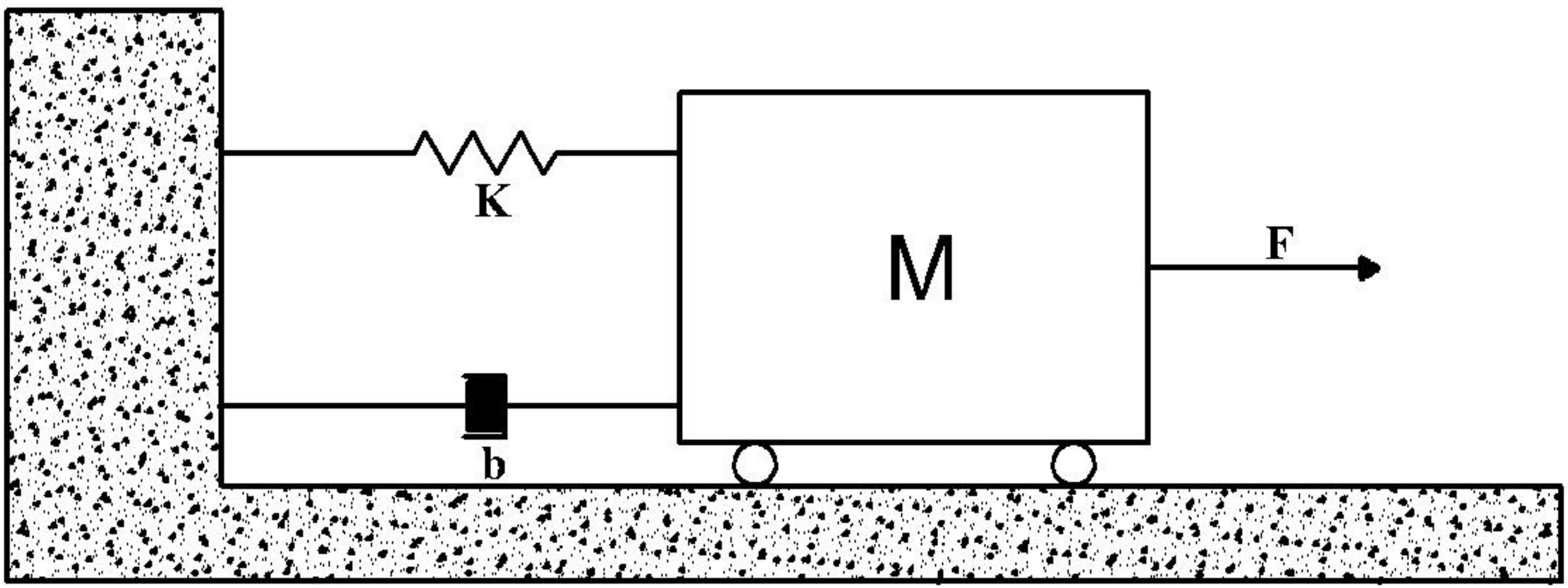
- Elemento Attrito: Smorzatore Torsionale
  - **Def.** Elemento meccanico privo di massa e di elasticità. La deformazione dell'elemento genera una reazione direttamente proporzionale alla velocità di deformazione
  - Siano δ_1 ed δ_2 le deformazioni torsionali agli estremi della molla. *b* è detto coefficiente di attrito viscoso dello smorzatore torsionale .



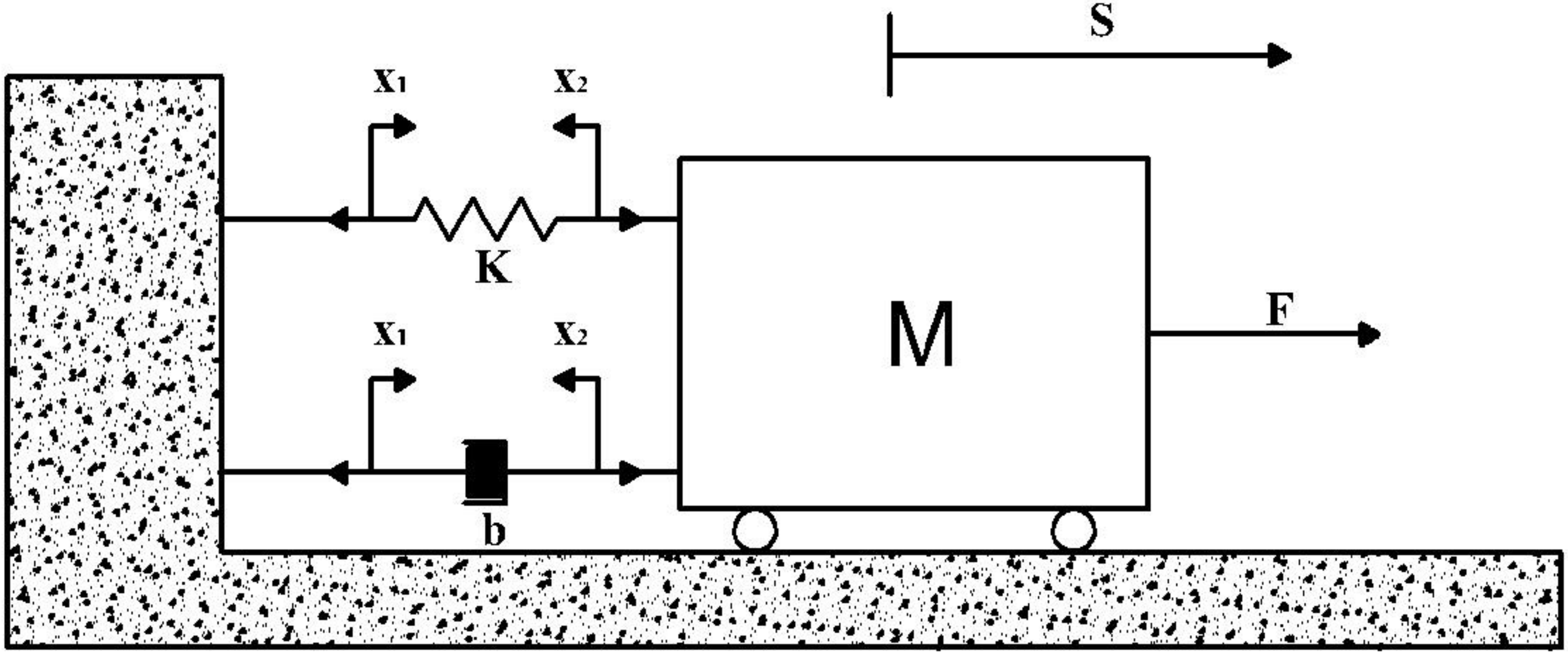
$$T = b \cdot (\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2)$$

$$b = \frac{Coppia}{Vel\,.\,Deformazione} = \frac{[Nm]}{[rad/s]}$$

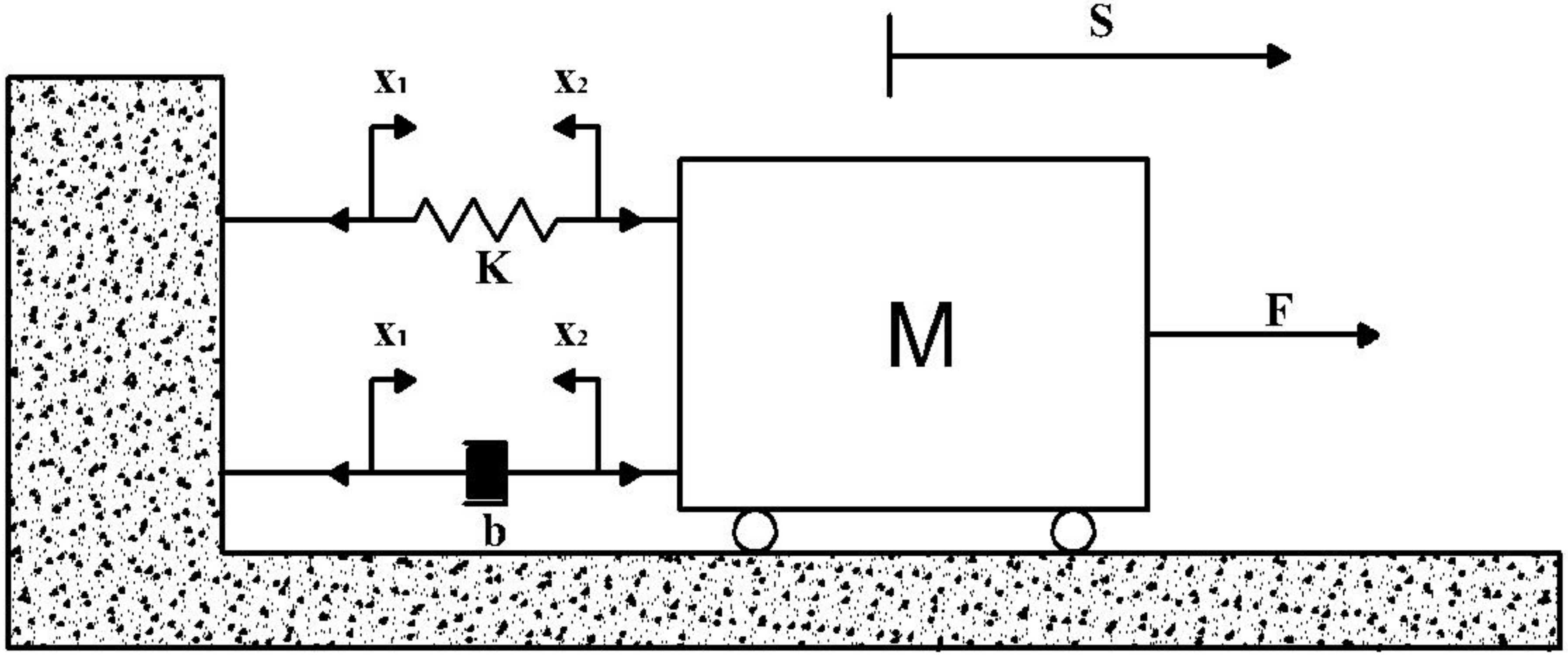
SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE



SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE



SISTEMA MASSA-MOLLA-SMORZATORE



$$F + K \cdot (x_1 + x_2) + b \cdot (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = M \cdot \ddot{s}$$

$$x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$$

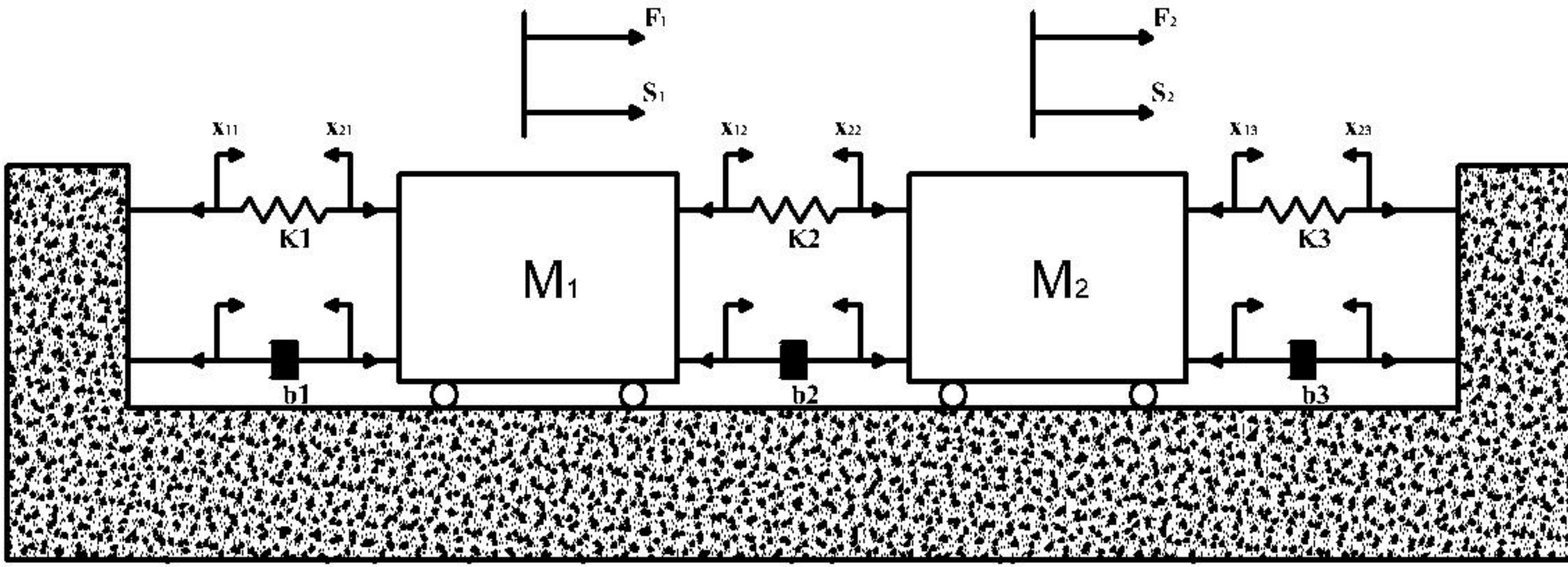
$$x_2 = -s, \dot{x}_2 = -\dot{s}$$

$$\boxed{F - K \cdot s - b \cdot \dot{s} = M \cdot \ddot{s}}$$

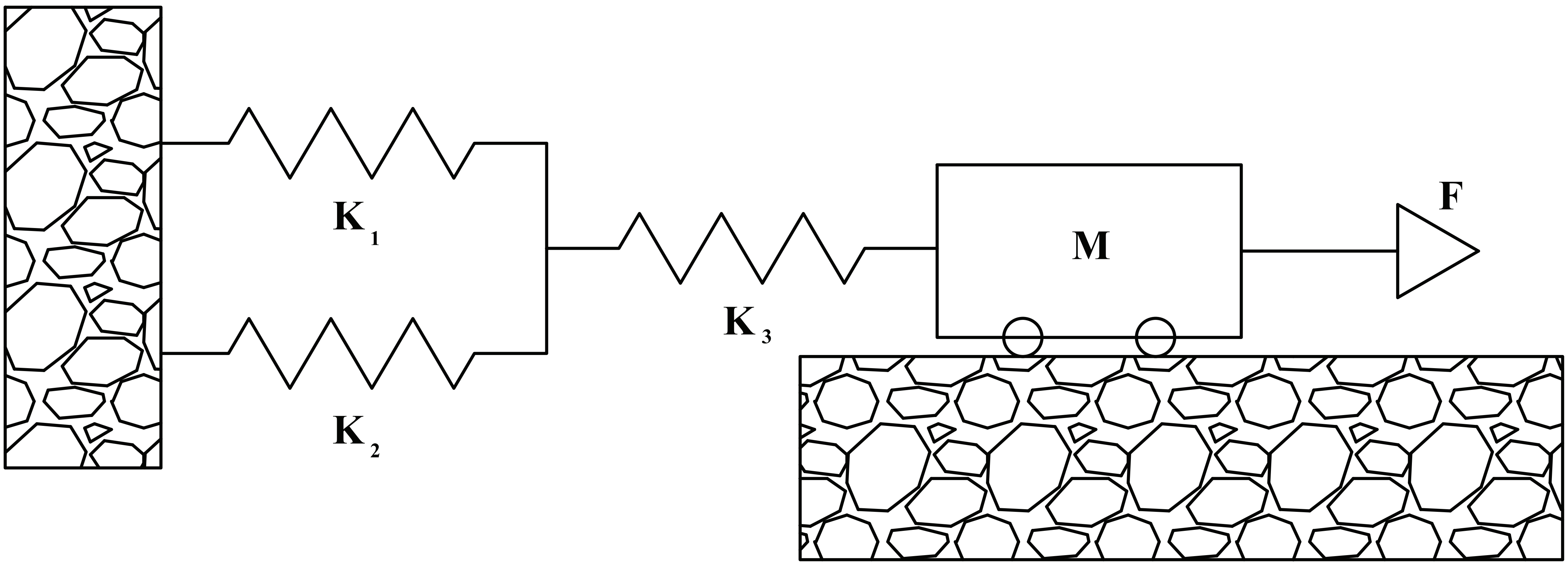
$$x_a = s, x_b = \dot{s} = \dot{x}_a, x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{K}{M} & -\dfrac{b}{M} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} F \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \qquad (1)$$

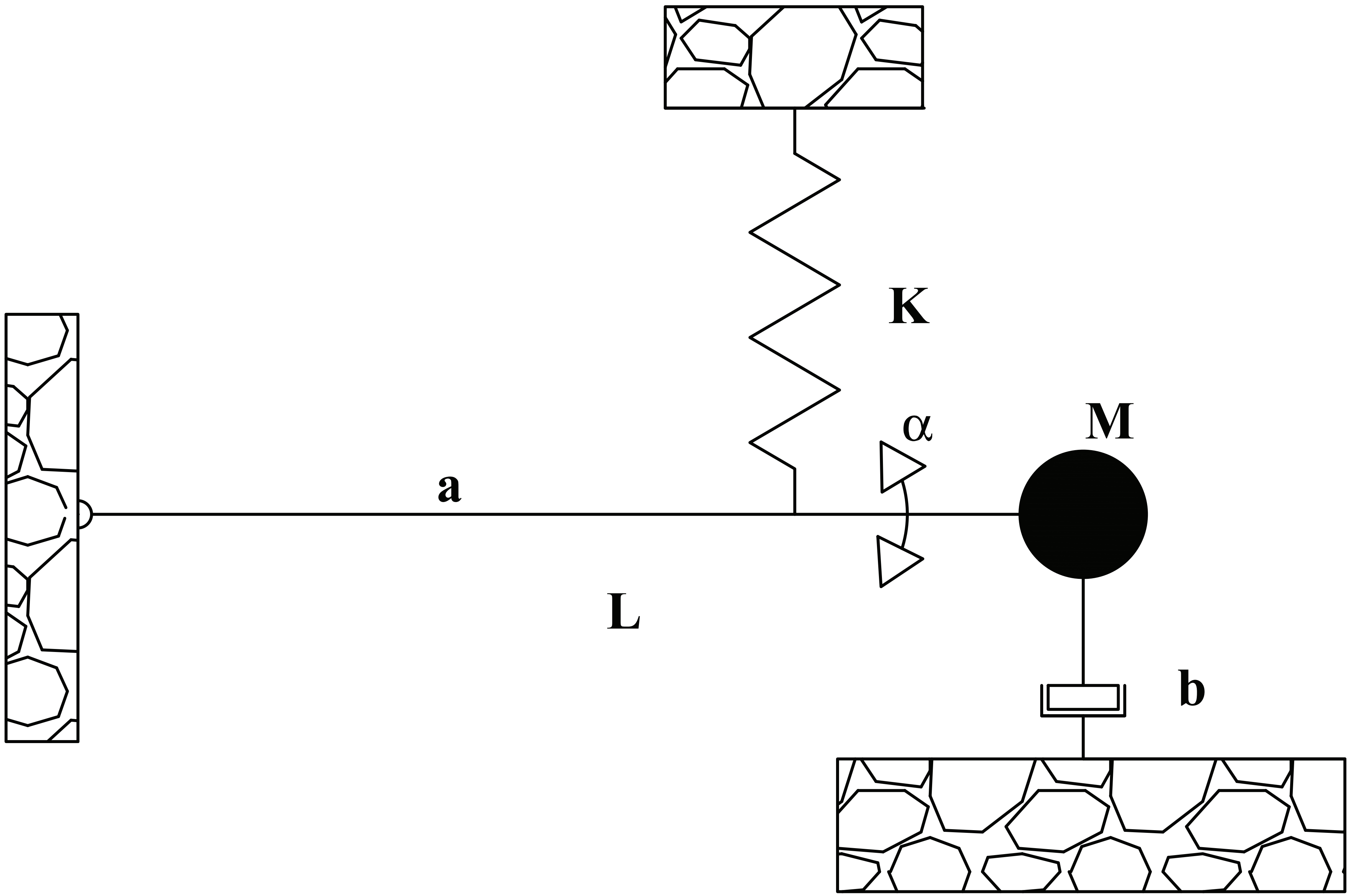
DOPPIA MASSA-MOLLA-SMORZATORE



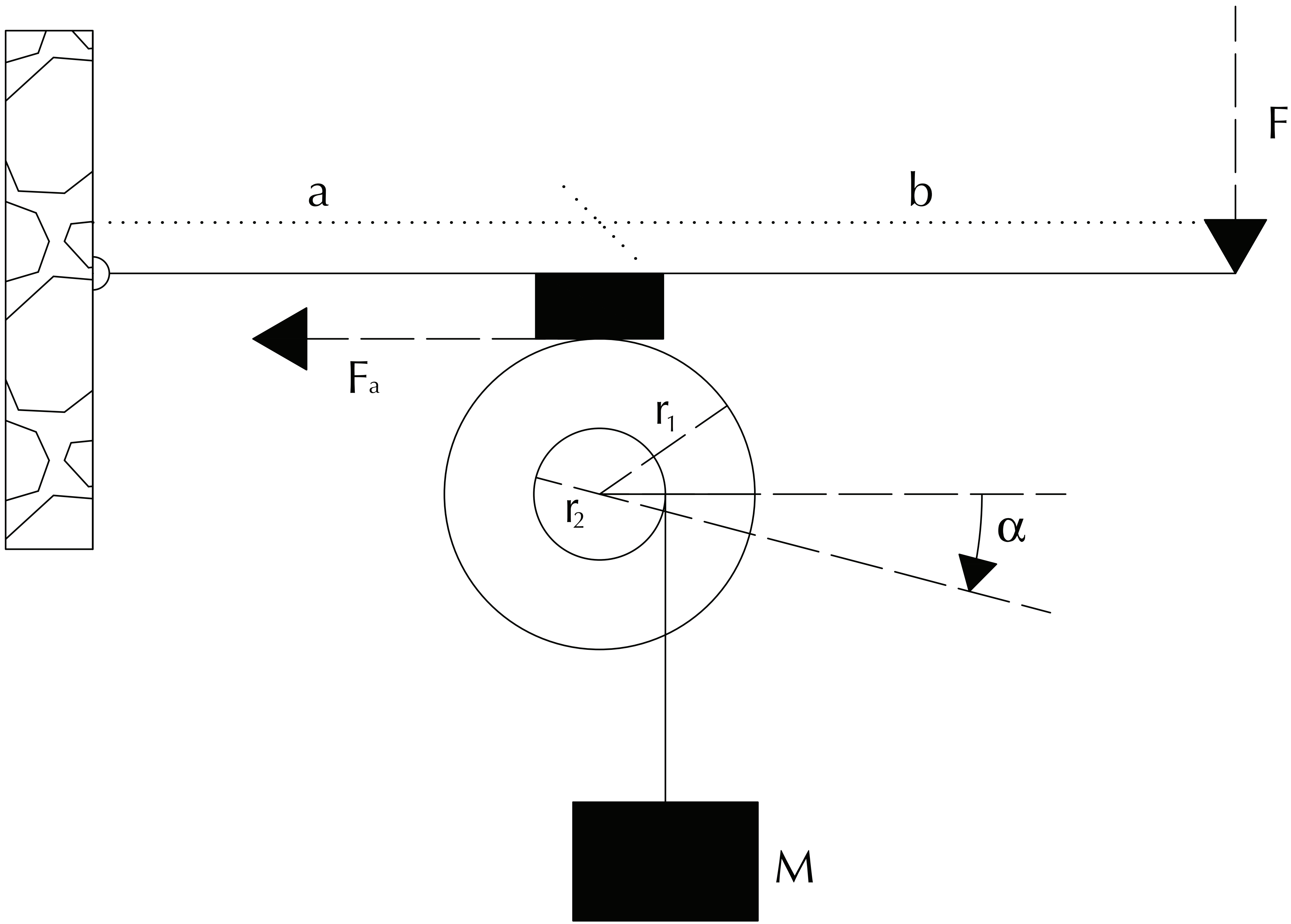
ESEMPIO



ESEMPIO



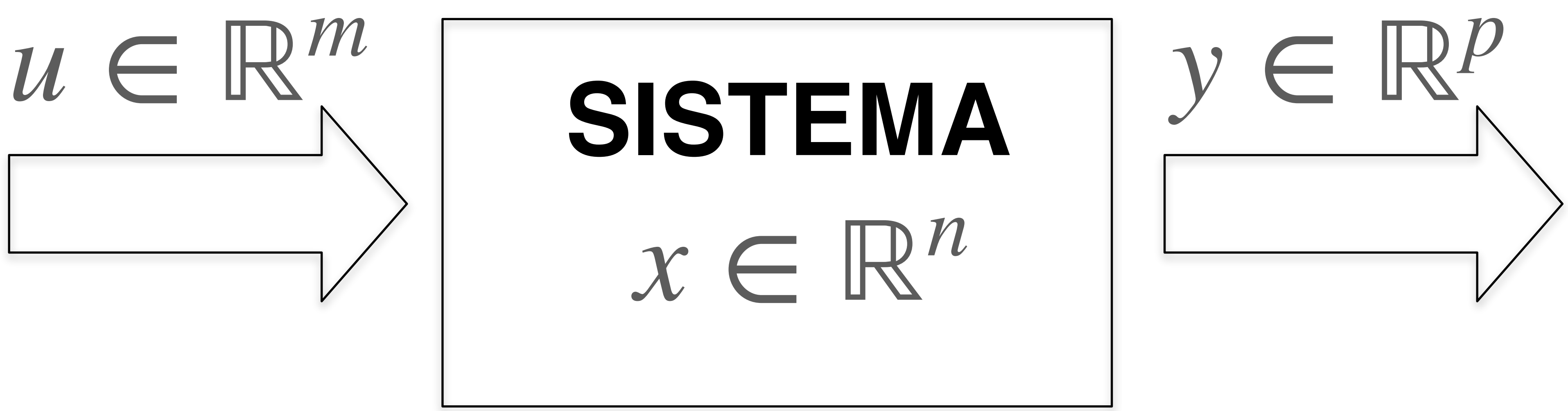
ESEMPIO



RAPPRESENTAZIONE ISU NON È UNICA

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (4)$$

RAPPRESENTAZIONE ISU NON E UNICA



$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
\qquad\qquad x(t_0) = x_0
$$

$$
z = T \cdot x : \quad |T| \neq 0
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= TAT^{-1}z(t) + TBu(t) \\
y(t) &= CT^{-1}z(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\
y(t) &= \hat{C}z(t) + Du(t)
\end{aligned}
$$