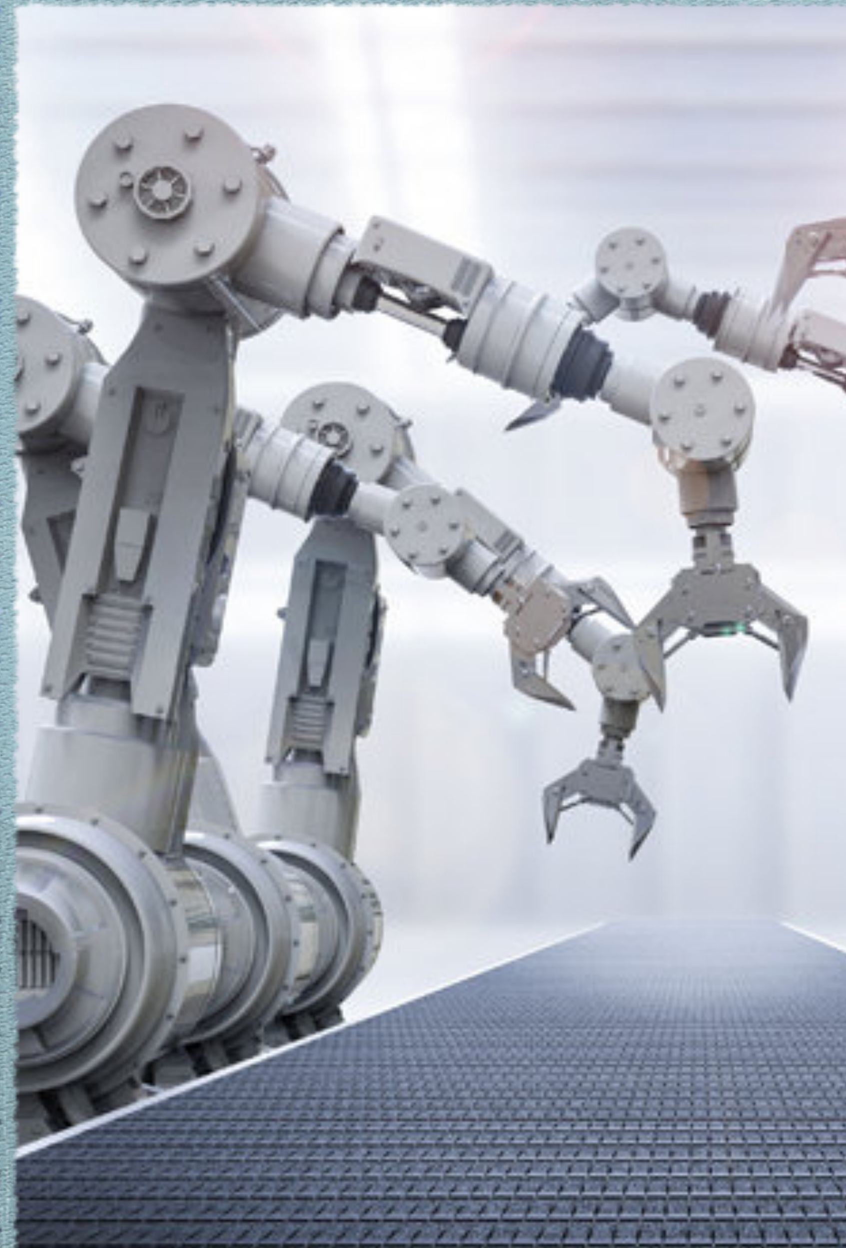
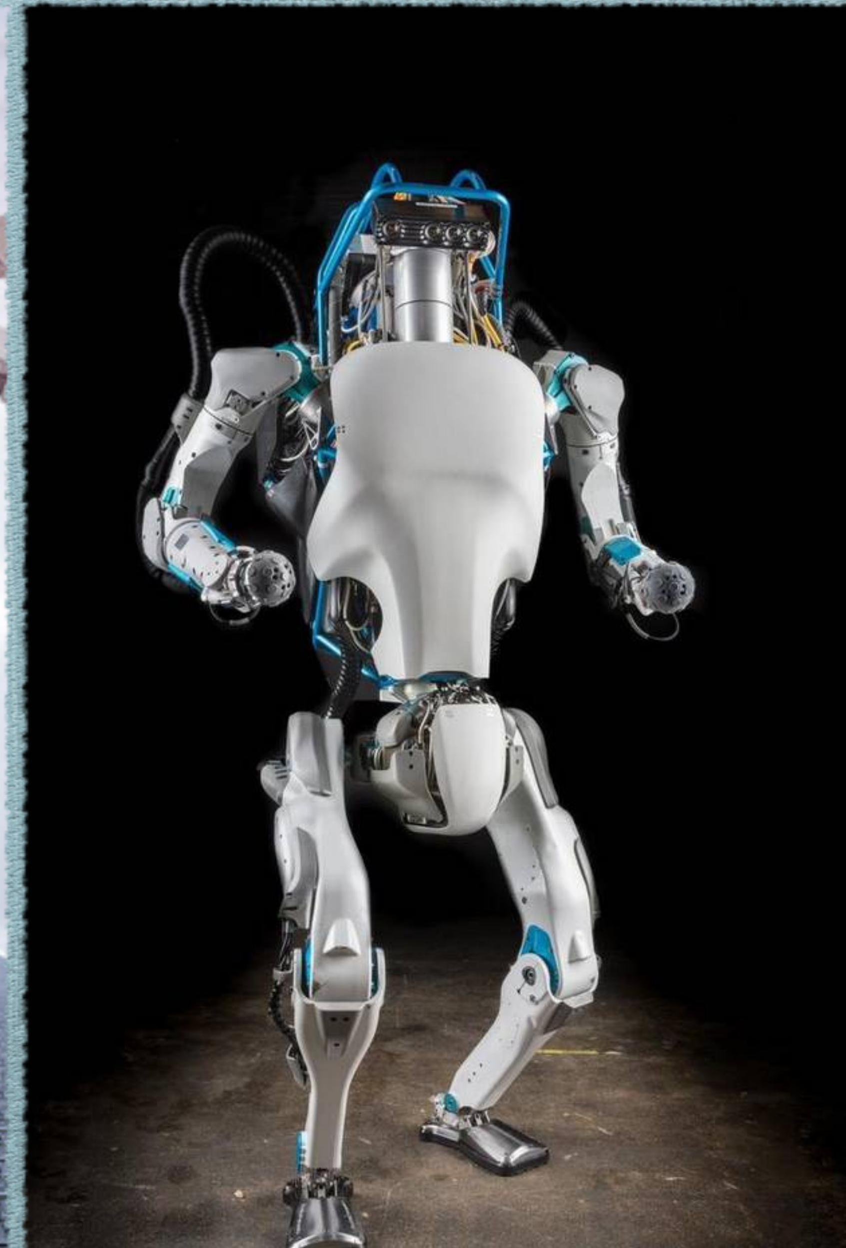




Automatica

A.A. 2023/2024

EQUILIBRIO, STABILITÀ E LINEARIZZAZIONE

DEFINIZIONE PUNTO DI EQUILIBRIO

- Si consideri il seguente sistema non-lineare

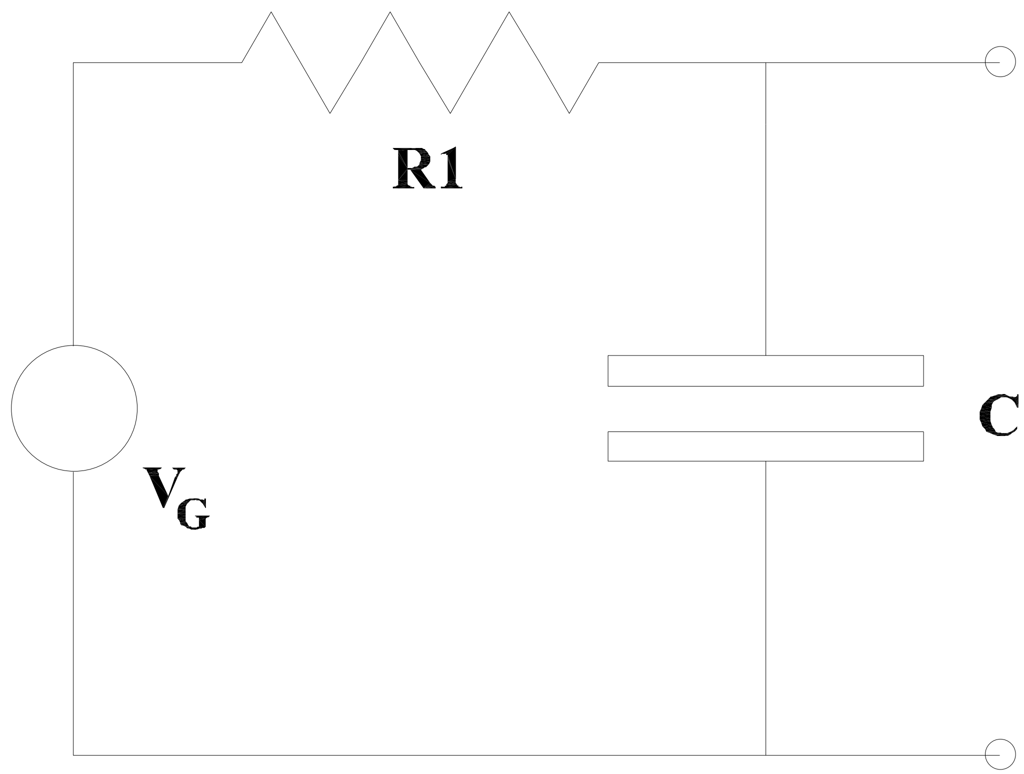
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad (1)$$

- La coppia $(\bar{x}, \bar{u})$ è detta **coppia (o punto) di equilibrio** se

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \qquad (2)$$

con $\bar{y}$ costante detta **uscita di equilibrio**

ESEMPIO#1 : CIRCUITO RC



$$\dot{V}_C(t) = -\frac{V_C(t)}{R_1 \cdot C} + \frac{V_G(t)}{R_1 \cdot C}$$
$$y(t) = V_C(t) \qquad (3)$$

- $(V_C = \bar{V}, V_G = \bar{V})$ è una condizione di equilibrio

$$\dot{V}_C(t) = -\frac{\bar{V}}{R_1 \cdot C} + \frac{\bar{V}}{R_1 \cdot C} = 0 \qquad y(t) = V_C(t) = \bar{V}$$

$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$

$g(\bar{x}, \bar{u}) = \bar{y}$

CLASSIFICAZIONE PUNTO EQUILIBRIO

Punti di equilibrio stabili

Punti di equilibrio instabili

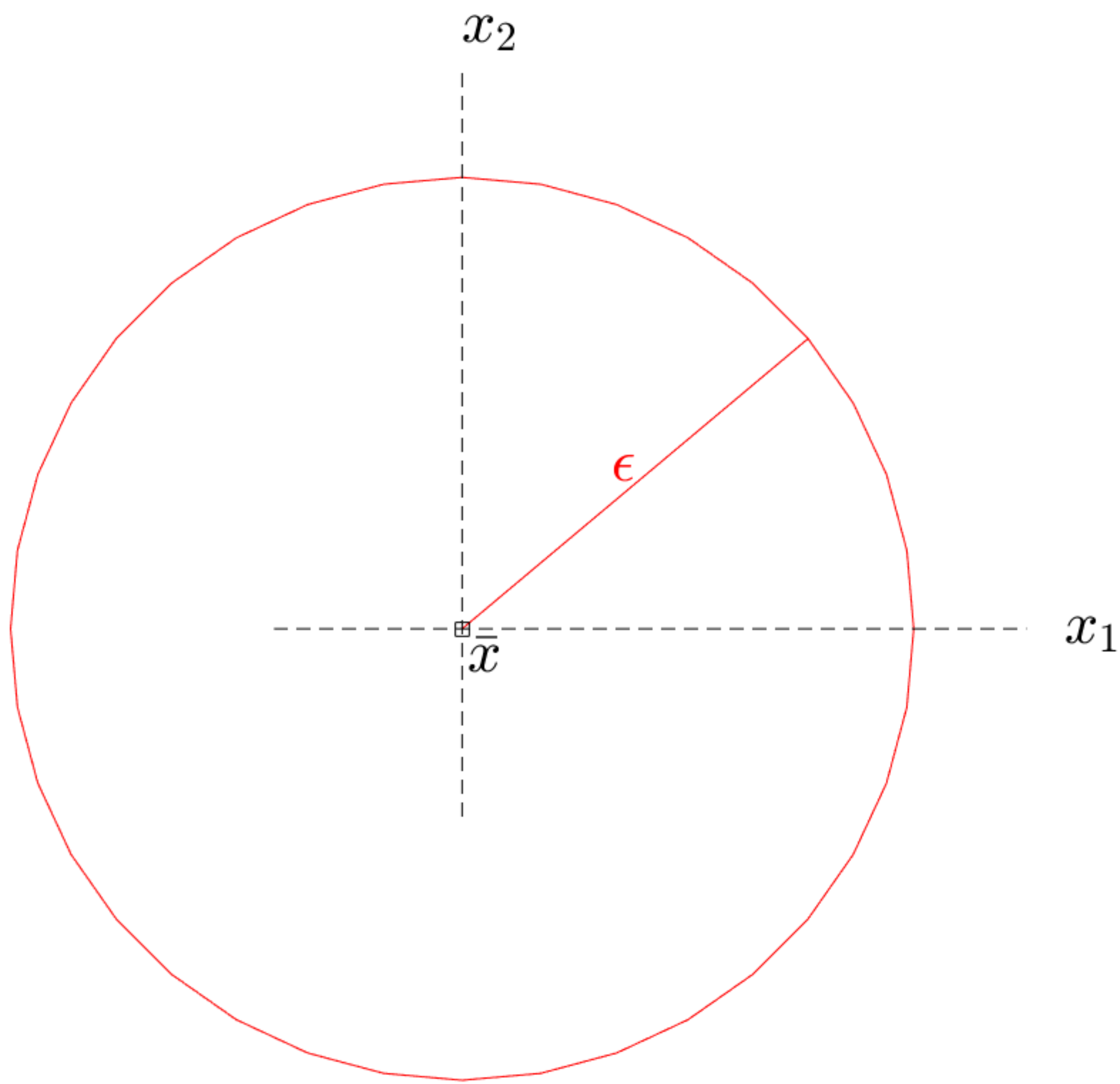
Insieme dei punti di equilibrio

- Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un **punto di equilibrio**
- Sia $\hat{x} \neq \bar{x}$ **(stato perturbato)**
- Sia $\hat{x}(t)$ la **traiettoria perturbata dello stato** ottenuta applicando il forzamento di equilibrio $\bar{u}$ a partire dalla condizione iniziale $\hat{x}$

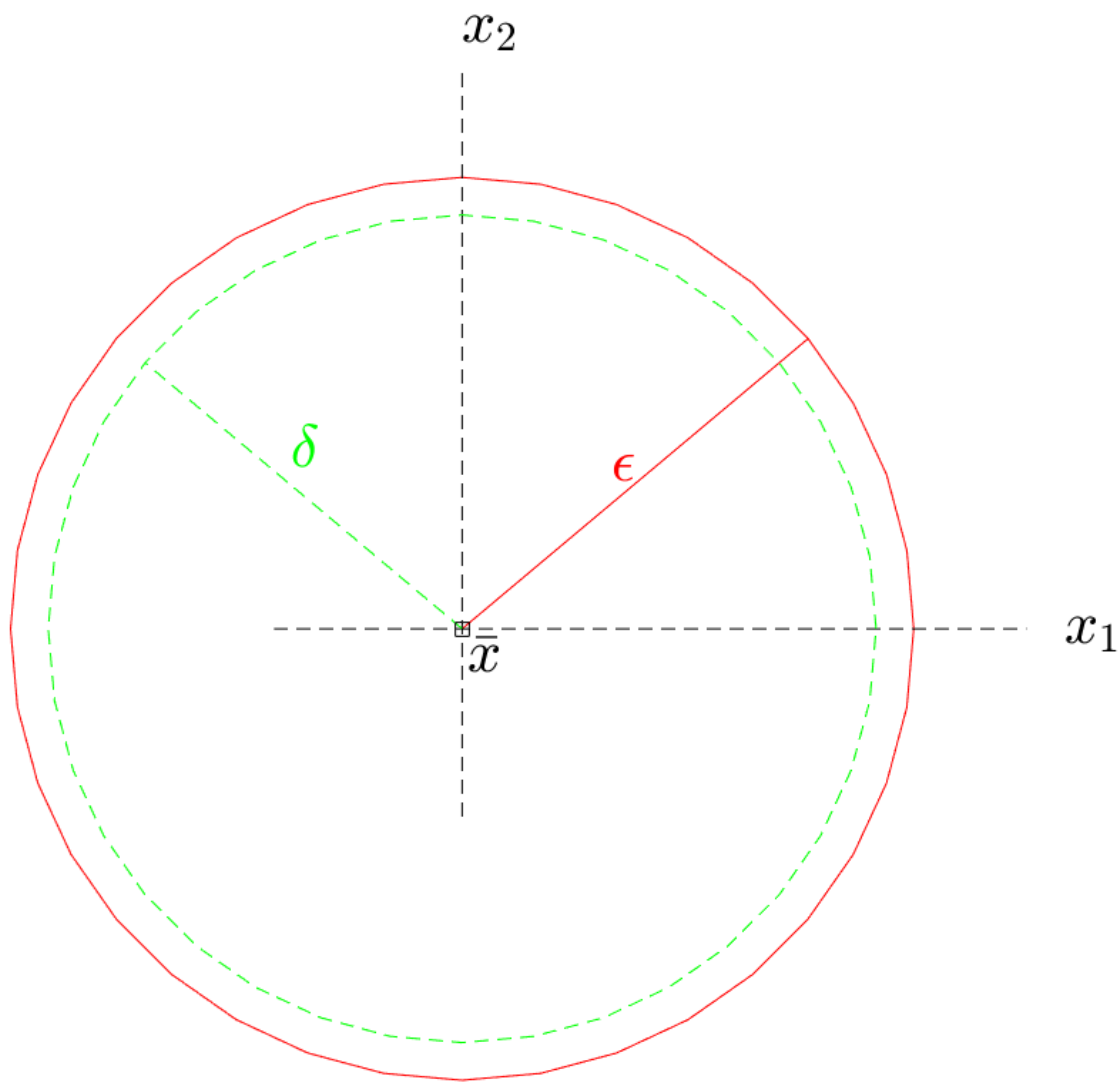
CLASSIFICAZIONE PUNTO EQUILIBRIO

Punto Equilibrio Stabile	$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$
Punto Equilibrio Instabile	Se non è Punto Eq. Stabile

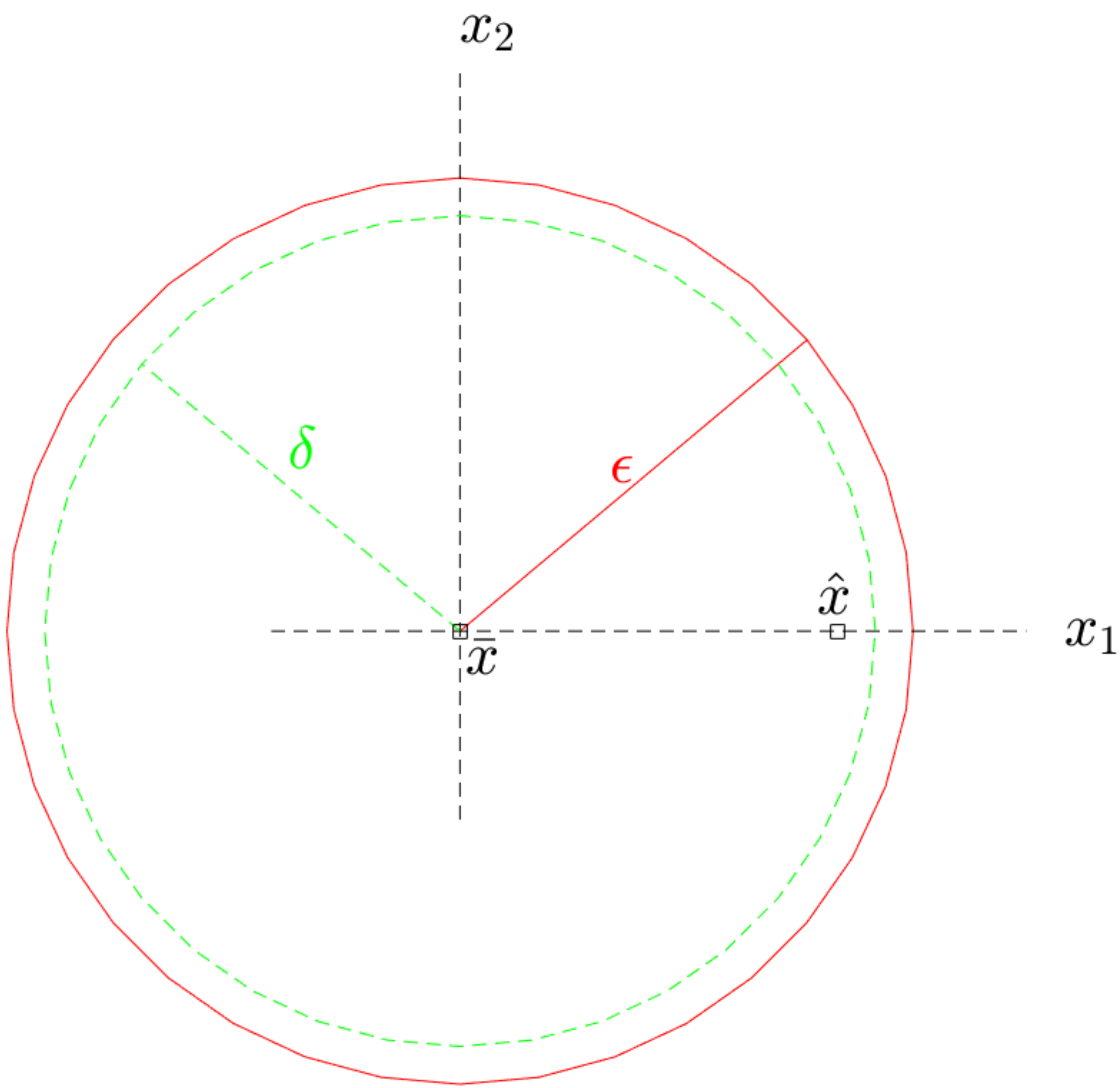
➤ Se un punto è di eq. stabile ed inoltre vale la condizione $\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$ allora il punto è detto di **Equilibrio Asintoticamente Stabile**



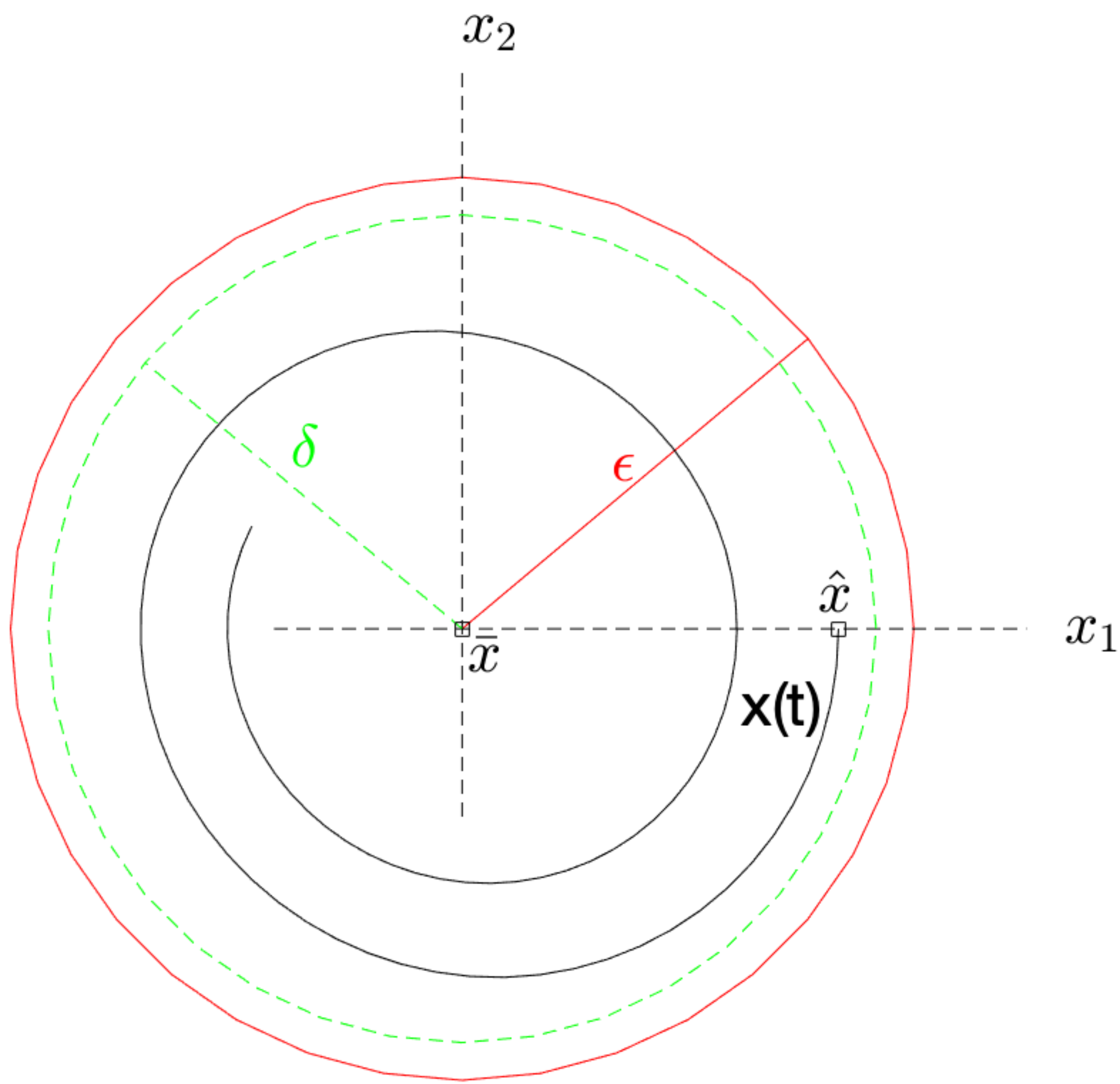
$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \ \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$$



$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$



$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$$



$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$$

CLASSIFICAZIONE PUNTO EQUILIBRIO

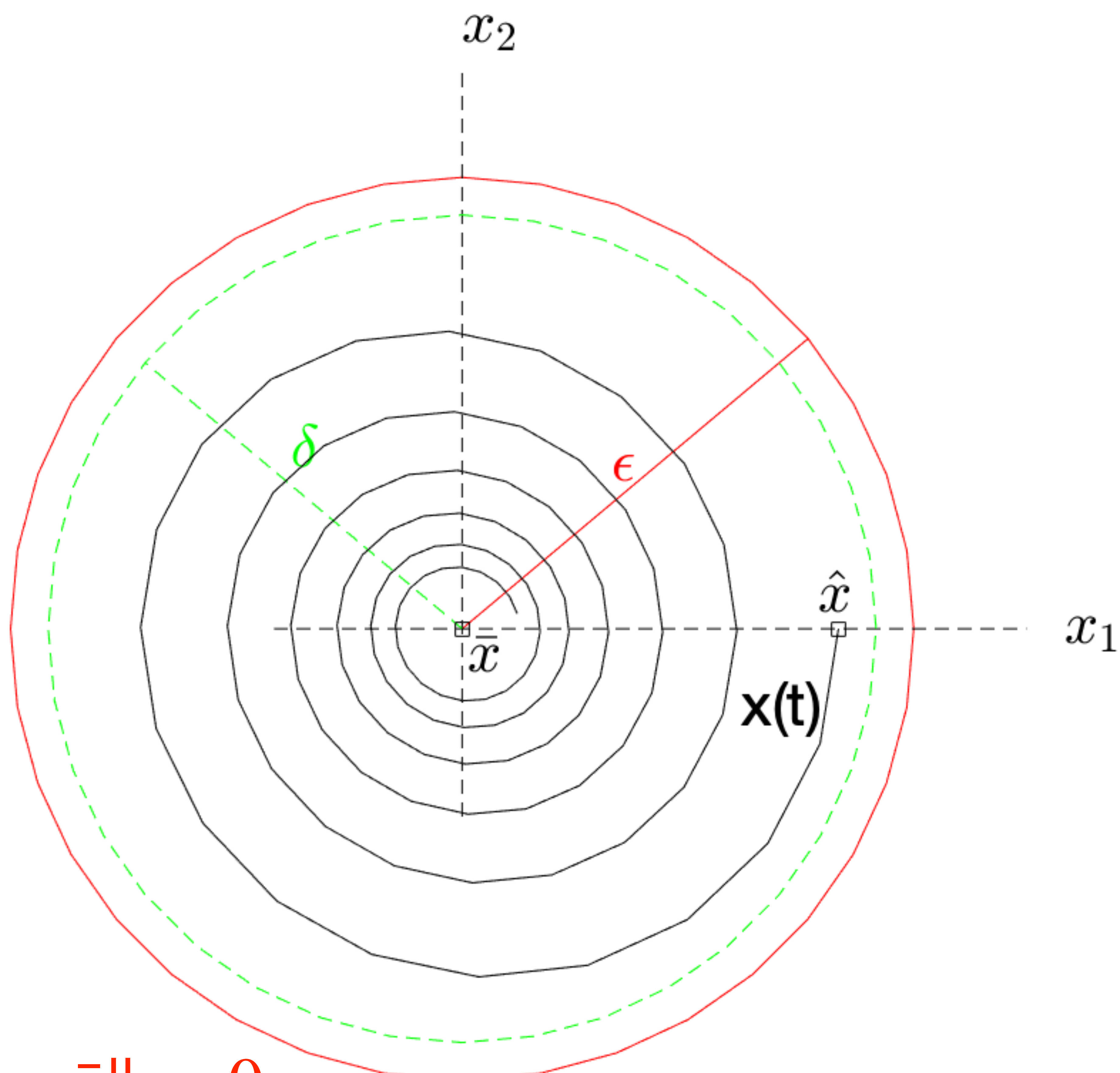
Punto Equilibrio Stabile	$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$
Punto Equilibrio Instabile	Se non è Punto Eq. Stabile

➤ Se un punto è di eq. stabile ed inoltre vale la condizione $\lim_{t \to \infty} \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| = 0$ allora il punto è detto di **Equilibrio Asintoticamente Stabile**

CLASSIFICAZIONE PUNTO EQUILIBRIO

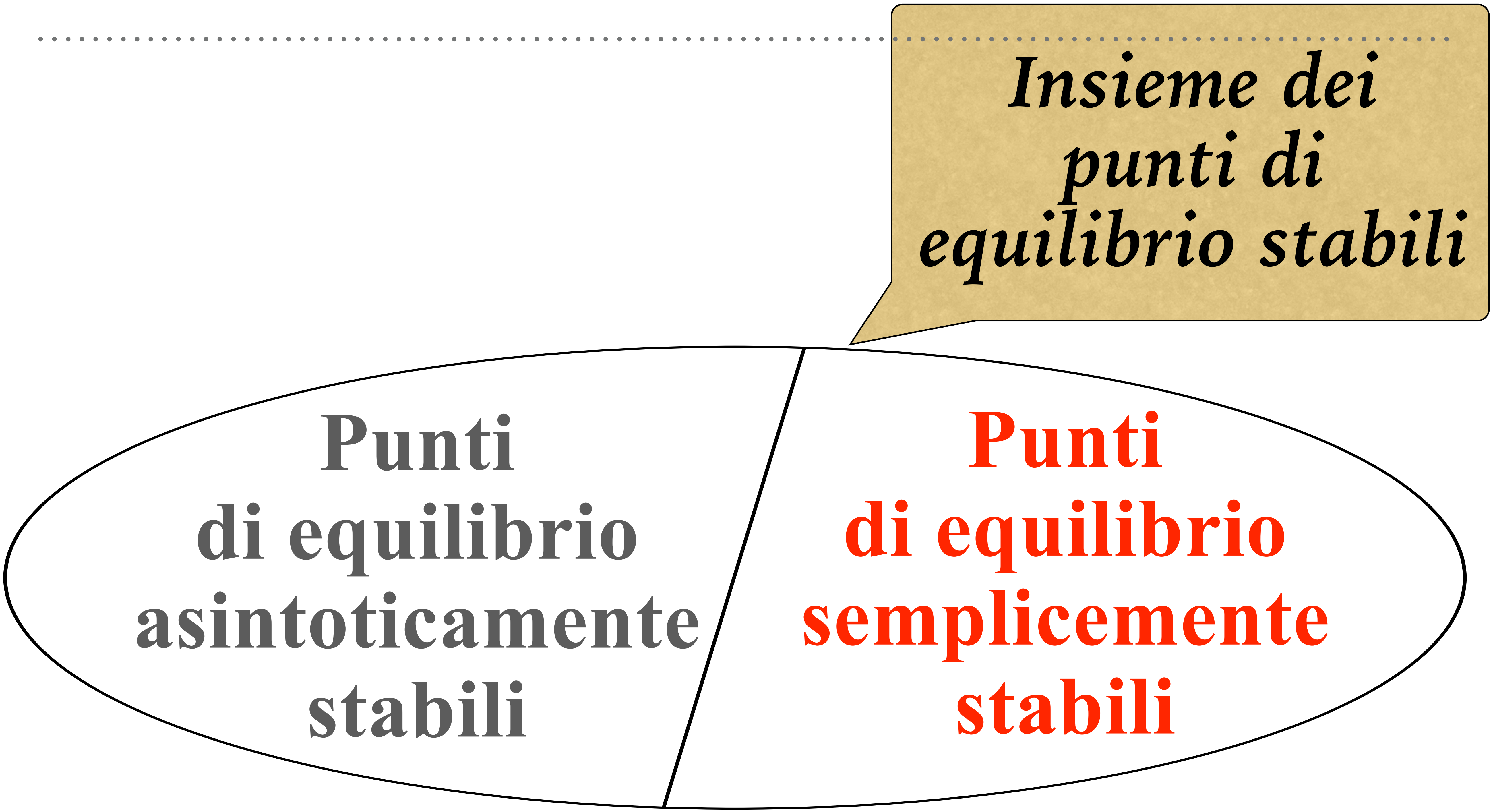
Punto Equilibrio Stabile	$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall \hat{x} \in I_{\bar{x},\delta} \; \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| \leq \epsilon$
Punto Equilibrio Instabile	Se non è Punto Eq. Stabile

- Se un punto è di eq. stabile ed inoltre vale la condizione $\lim_{t \to \infty} \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| = 0$ allora il punto è detto di **Equilibrio Asintoticamente Stabile**

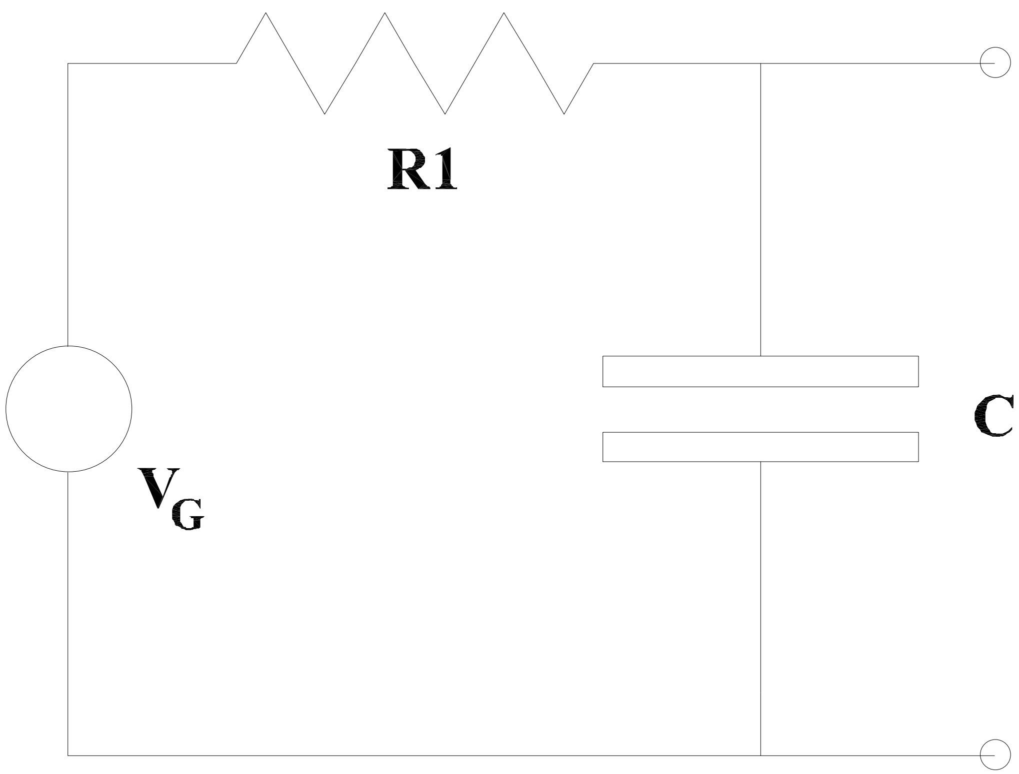


$$\lim_{t \to \infty} \|\hat{x}(t) - \bar{x}\| = 0$$

PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE



ESEMPIO#1 : CIRCUITO RC



$$\dot{V}_C(t) = -\frac{V_C(t)}{R_1 \cdot C} + \frac{V_G(t)}{R_1 \cdot C}$$
$$y(t) = V_C(t)$$

- $(V_C = \bar{V}, V_G = \bar{V})$ è una condizione di equilibrio

- ESERCIZIO: Si caratterizzi il tipo di equilibrio

    - Si noti che se $\dot{V}_C(t) = 0$ allora $V_C(t) = \bar{V}$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

- Si consideri il sistema non-lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- Si consideri un punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$, sia $x(t) = \bar{x}$ la traiettoria di equilibrio dello stato del sistema e sia $\bar{y}$ l'uscita di equilibrio

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \quad \bar{x}(t) = \bar{x} \;\; \forall t \qquad (5)$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

- PERTURBAZIONE: Si consideri il forzamento $u = \bar{u} + \delta u$ e sia $x = \bar{x} + \delta x$ la condizione iniziale

- Sono interessato a calcolare l'uscita del sistema in CONDIZIONE PERTURBATA

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

- Sia $x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$ la risposta del sistema nello stato e $y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$ nell'uscita in CONDIZIONE PERTURBATA

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} + \delta \dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \\ \bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \end{cases} \qquad (6)$$

Posso sviluppare la (6) in serie di Taylor

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \\ \bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \end{cases}$$

$$\dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) = \cdots \tag{7}$$

$$\cdots = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t) + R_f(x, u)$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) = \cdots \tag{8}$$

$$\cdots = g(\bar{x}, \bar{u}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t) + R_g(x, u)$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix} \quad g(x,u) = \begin{bmatrix} g_1(x,u) \\ \vdots \\ g_p(x,u) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

$$f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ \vdots \\ f_n(x,u) \end{bmatrix} \quad g(x,u) = \begin{bmatrix} g_1(x,u) \\ \vdots \\ g_p(x,u) \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \frac{\partial g_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial g}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

$$\dot{\bar{x}} + \delta\dot{x}(t) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \approx \cdots \tag{9}$$

$$\cdots \approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

$$\bar{y} + \delta y(t) = g(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) \approx \cdots \tag{10}$$

$$\cdots \approx g(\bar{x}, \bar{u}) + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

- Poichè $\dot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$ e $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$ in quanto $(\bar{x}, \bar{u})$ è condizione di equilibrio

$$\cancel{\dot{\bar{x}}} + \delta \dot{x}(t) \approx \cdots \tag{11}$$

$$\cdots \approx \cancel{f(\bar{x}, \bar{u})} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

$$\cancel{\bar{y}} + \delta y(t) \approx \cdots \tag{12}$$

$$\cdots \approx \cancel{g(\bar{x}, \bar{u})} + \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x=\bar{x}, u=\bar{u}} \delta u(t)$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE

Assumendo trascurabile l'errore introdotto dall'approssimazione

$$\delta\dot{x}(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta u(t) \qquad \delta x(t_0) = \delta x$$

$$\delta y(t) = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta x(t) + \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{x=\bar{x},u=\bar{u}} \delta u(t) \qquad (13)$$

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\delta\dot{x}(t) = A\cdot\delta x(t) + B\cdot\delta u(t)$$

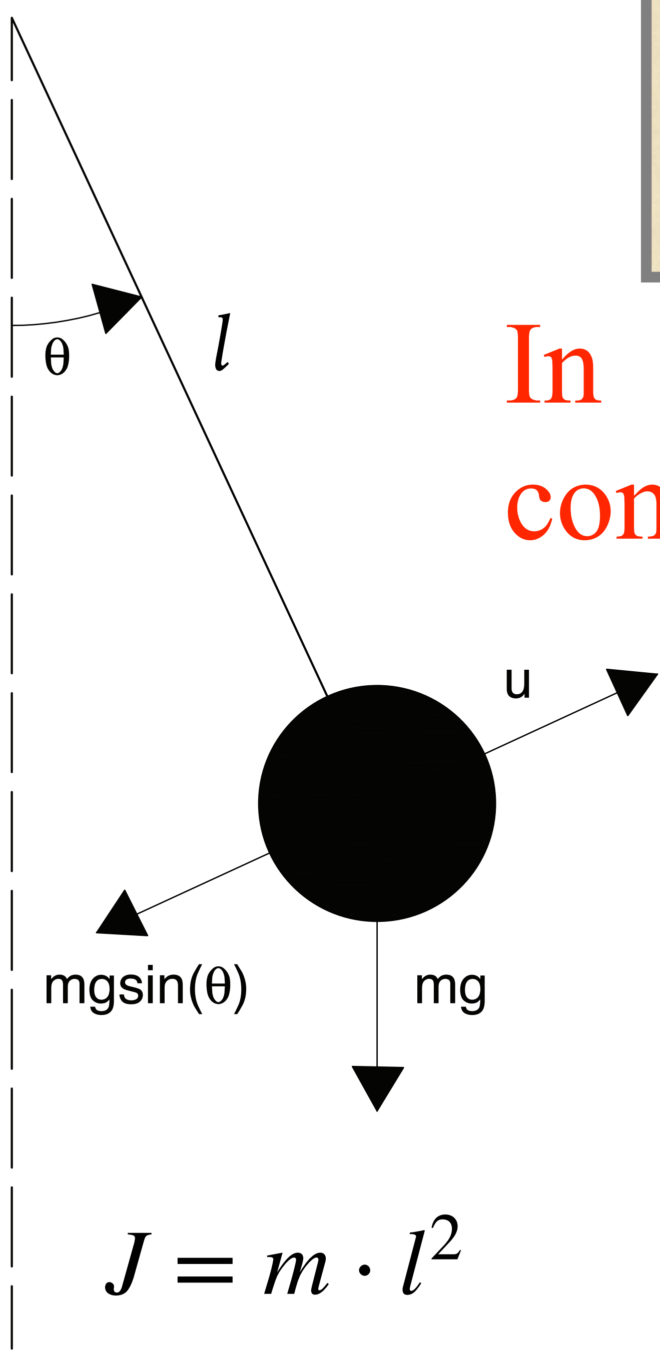
$$\delta y(t) = C\cdot\delta x(t) + D\cdot\delta u(t) \qquad (14)$$

METODO DELLA LINEARIZZAZIONE (BOLZERN)

- Il procedimento della **linearizzazione** consiste nel **descrivere** il **comportamento** di un **sistema non lineare** attorno ad un punto di equilibrio **mediante** un particolare **sistema lineare**.

- Quest'ultimo **sistema lineare costituisce** solo **un'approssimazione** del sistema originario ma è estremamente **utile** per affrontare molti problemi specifici **perché** a esso sono **applicabili i metodi di analisi e sintesi disponibili per i sistemi lineari**

ESEMPIO#2: PENDOLO



$$J = m \cdot l^2$$

$$J \cdot \ddot{\theta} = u \cdot l - m \cdot g \cdot l \cdot sin(\theta) - b\dot{\theta}$$
$$y = \theta$$

In quanto sistema meccanico, scelgo come stato

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

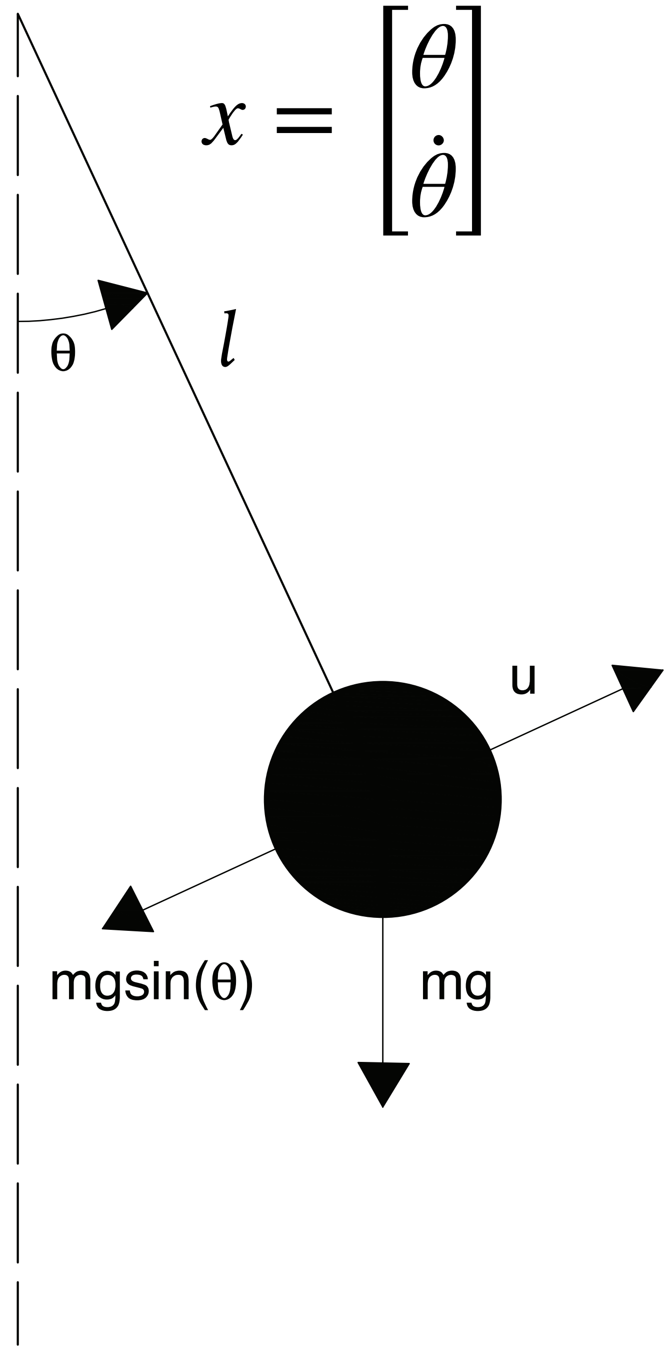
Posizione Angolare

Velocità Angolare

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u \cdot \frac{l}{J} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2$$
$$y = x_1$$

ESEMPIO#2: PENDOLO

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \cdot \frac{l}{J} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

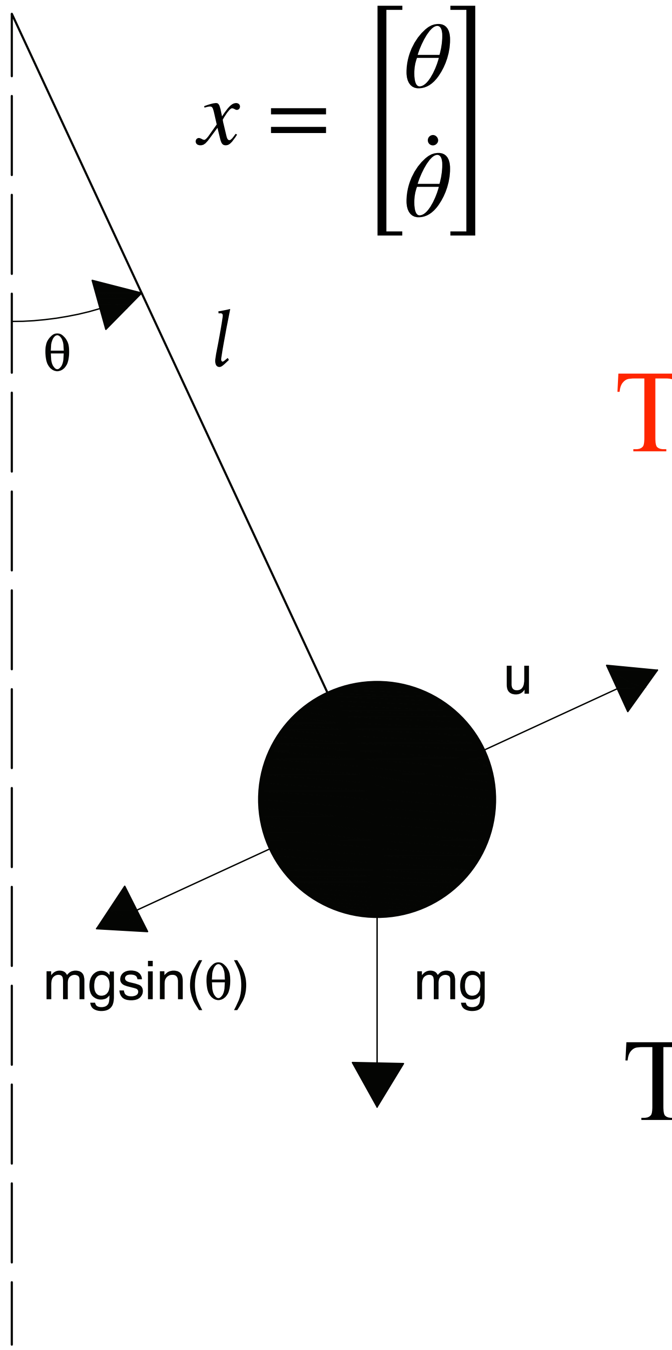
Scelgo forzamento nullo e calcolo gli stati di equilibrio corrispondenti. Ovvero impongo $\dot{x}_1 = 0 \; \dot{x}_2 = 0$

$$x_2 = 0 \qquad \cancel{u \cdot \frac{l}{J}} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \cancel{\frac{b}{J} x_2} = 0$$

$u = 0$

$x_2 = 0$

ESEMPIO#2: PENDOLO



$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + k \cdot \pi \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Tra le possibili scelgo la seguente

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = 0$$

Condizione di Equilibrio

Tra le possibili scelgo la seguente

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = 0$$

Condizione Perturbata

ESEMPIO#2: PENDOLO

$$f_1(x,u) = x_2$$
$$f_2(x,u) = u \cdot \frac{l}{J} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2$$
$$g_1(x,u) = x_1$$

$$A = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m \cdot l^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, u=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{bmatrix}$$

ESEMPIO#2: PENDOLO

$$f_1(x,u) = x_2$$

$$f_2(x,u) = u \cdot \frac{l}{J} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2$$

$$g_1(x,u) = x_1$$

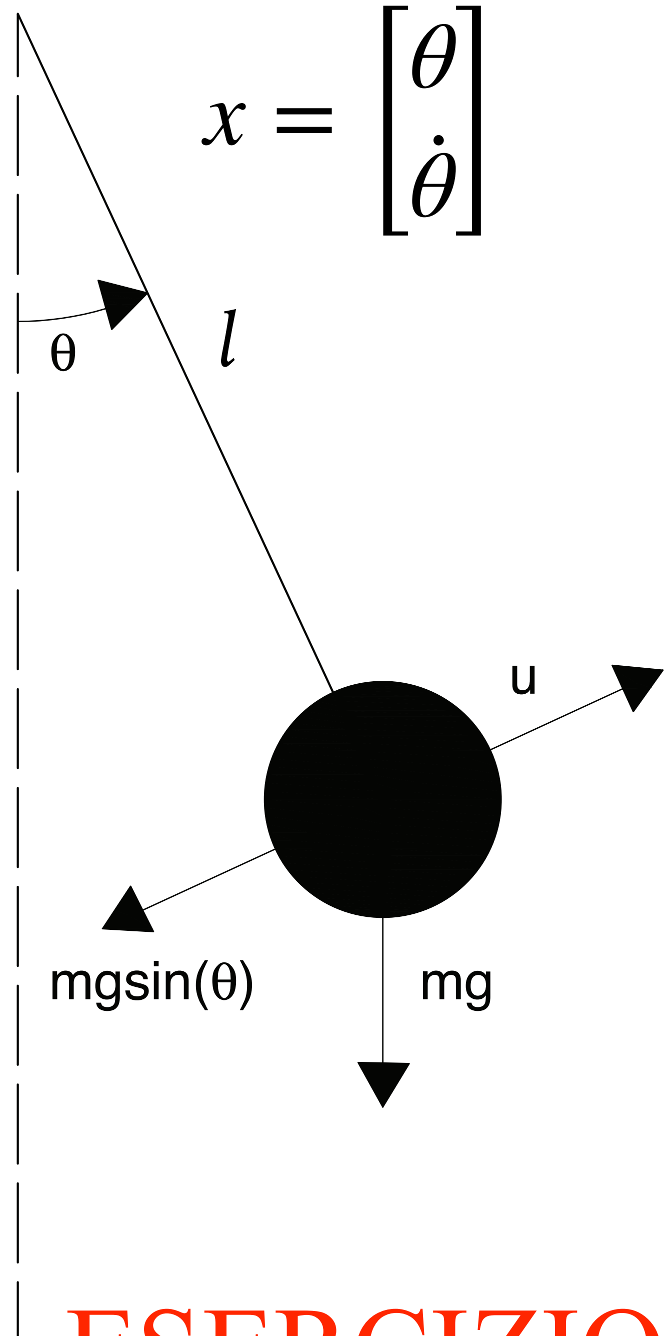
$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} \Bigg|_{x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, u=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, u=0} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

SISTEMA LINEARIZZATO

$$\dot{\delta x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

$$\delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta x + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

ESEMPIO#2: PENDOLO



$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Non Lineare

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = u \cdot \frac{l}{J} - \frac{m \cdot g \cdot l}{J} \cdot sin(x_1) - \frac{b}{J} x_2$$
$$y = x_1$$

$$\dot{\delta x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{b}{m \cdot l^2} \end{bmatrix} \cdot \delta x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \cdot l} \end{bmatrix} \cdot \delta u$$

$$\delta y = [1 \quad 0] \cdot \delta x + [0] \cdot \delta u$$

Linearizzato

- ESERCIZIO: Si analizzi numericamente la qualità dell'approssimazione