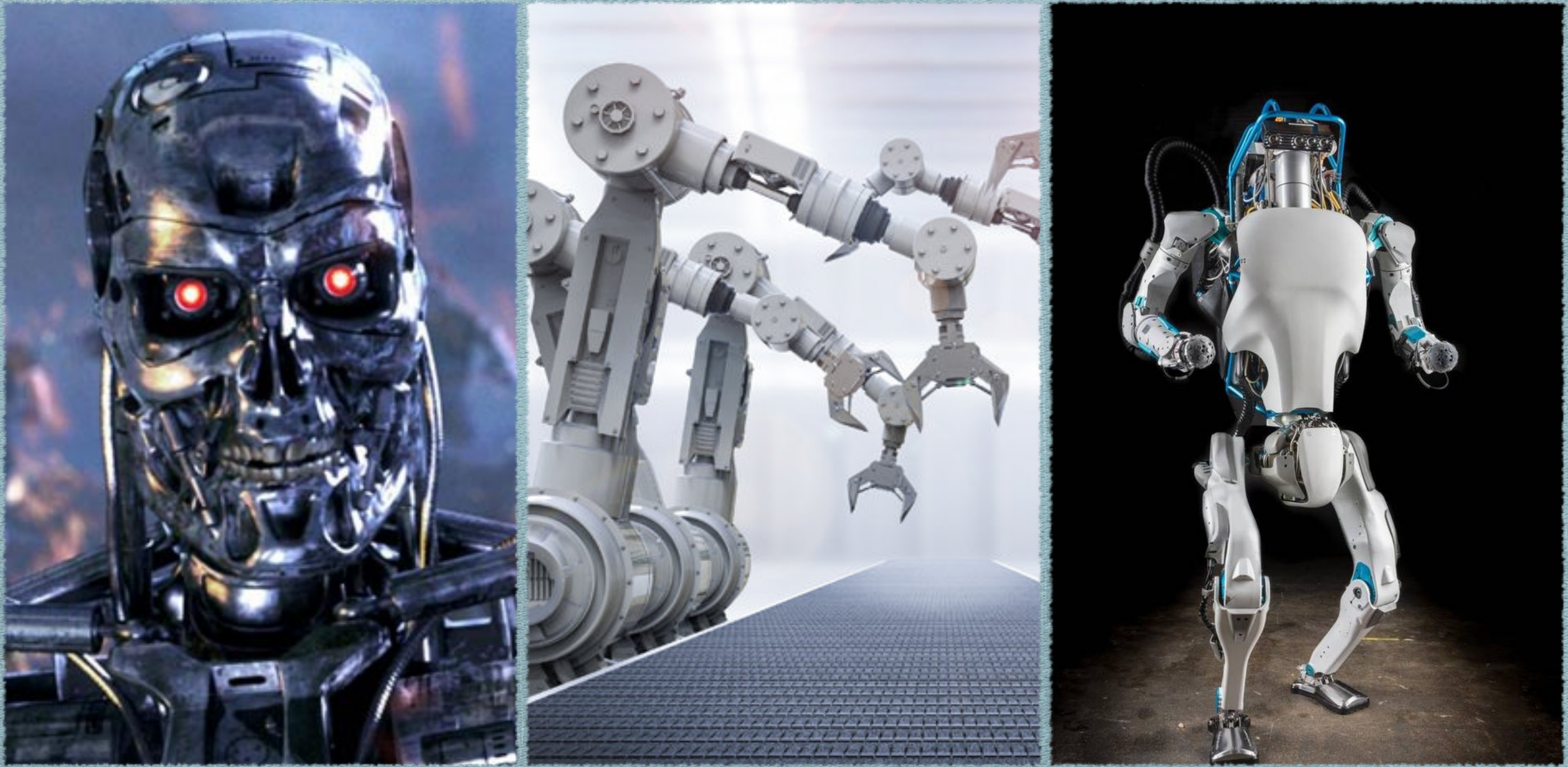


Automatica

A.A. 2023/2024

STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

RISPOSTA SISTEMA LINEARE STAZIONARIO

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

- La risposta del sistema ha la seguente forma

.

$$x(t) = e^{A \cdot t} x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$y(t) = C e^{A \cdot t} x_0 + \int_0^t C e^{A \cdot (t-\tau)} B u(\tau) \cdot d\tau + D u(t) \qquad (2)$$

PUNTO DI EQUILIBRIO

- Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un **punto di equilibrio**

.

$$\begin{cases} A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{y} = C \cdot \bar{x} + D \cdot \bar{u} \end{cases} \tag{3}$$

- Vale la seguente relazione

$$\bar{x} = e^{A \cdot t} \bar{x} + \int_0^t e^{A \cdot (t - \tau)} B d\tau \cdot \bar{u} \quad \forall t \geq 0 \tag{4}$$

ANALISI STABILITA DEL PUNTO DI EQUILIBRIO

- Si consideri il forzamento di equilibrio $\bar{u}$ e sia $\hat{x} \neq \bar{x}$ una generica condizione iniziale per il sistema (1)

$$x(t) = e^{A \cdot t}\hat{x} + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} B \cdot d\tau \cdot \bar{u} \qquad (5)$$

- Nell'ottica di caratterizzare la stabilità del punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$, considero la seguente quantità

$$\|x(t) - \bar{x}\| = \|e^{A \cdot t} \cdot (\hat{x} - \bar{x})\| \leq \|e^{A \cdot t}\| \cdot \|\hat{x} - \bar{x}\| \quad (6)$$

ANALISI STABILITA DEL PUNTO DI EQUILIBRIO

- Le caratteristiche di stabilità del punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ dipendono esclusivamente dalle proprietà dell'esponenziale di matrice e^{At}

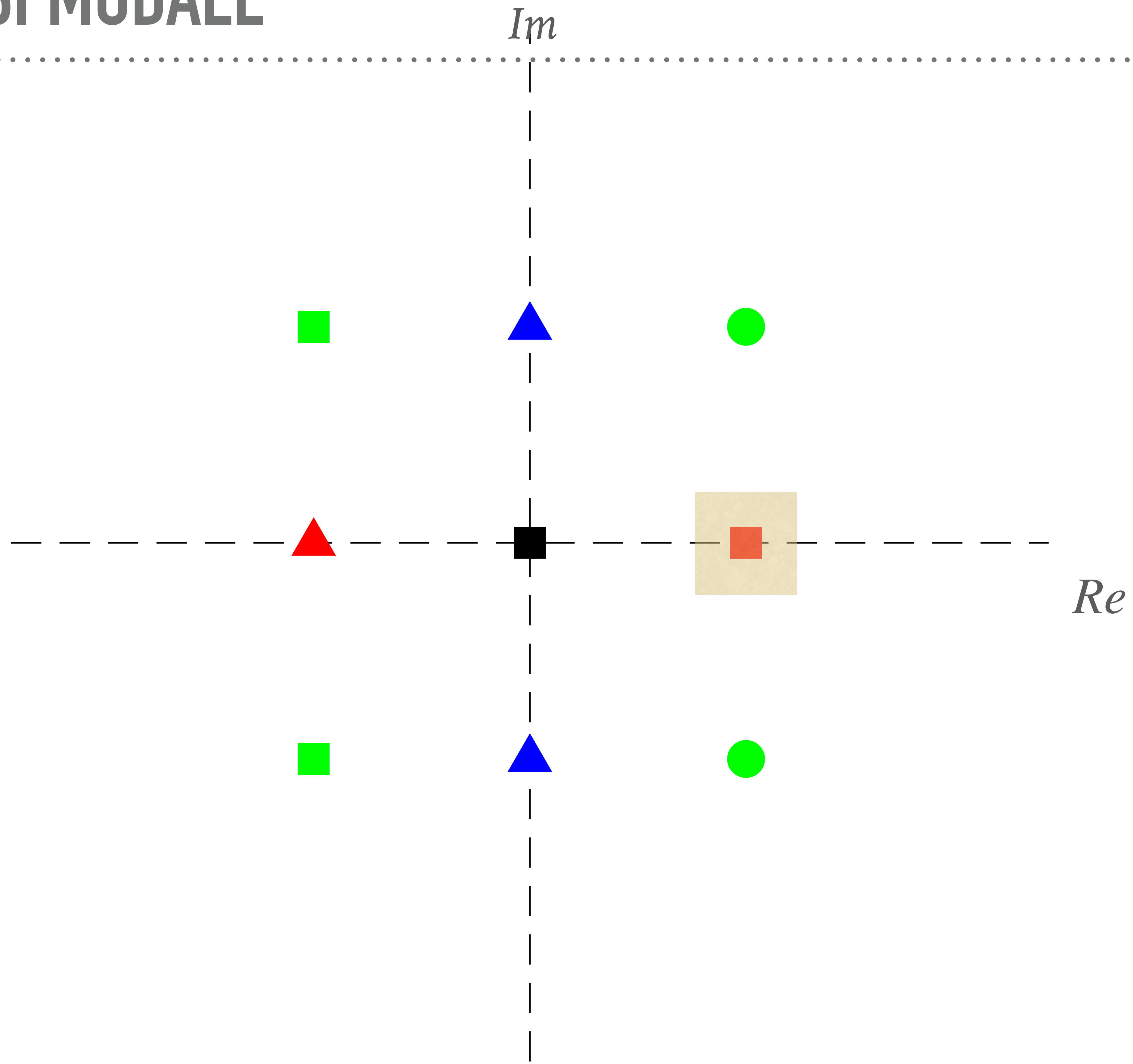
- Dato il sistema (1), se $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio semplicemente stabile/asintoticamente stabile/instabile allora **tutti i punti di equilibrio avranno le stesse caratteristiche di stabilità**

ANALISI MODALE

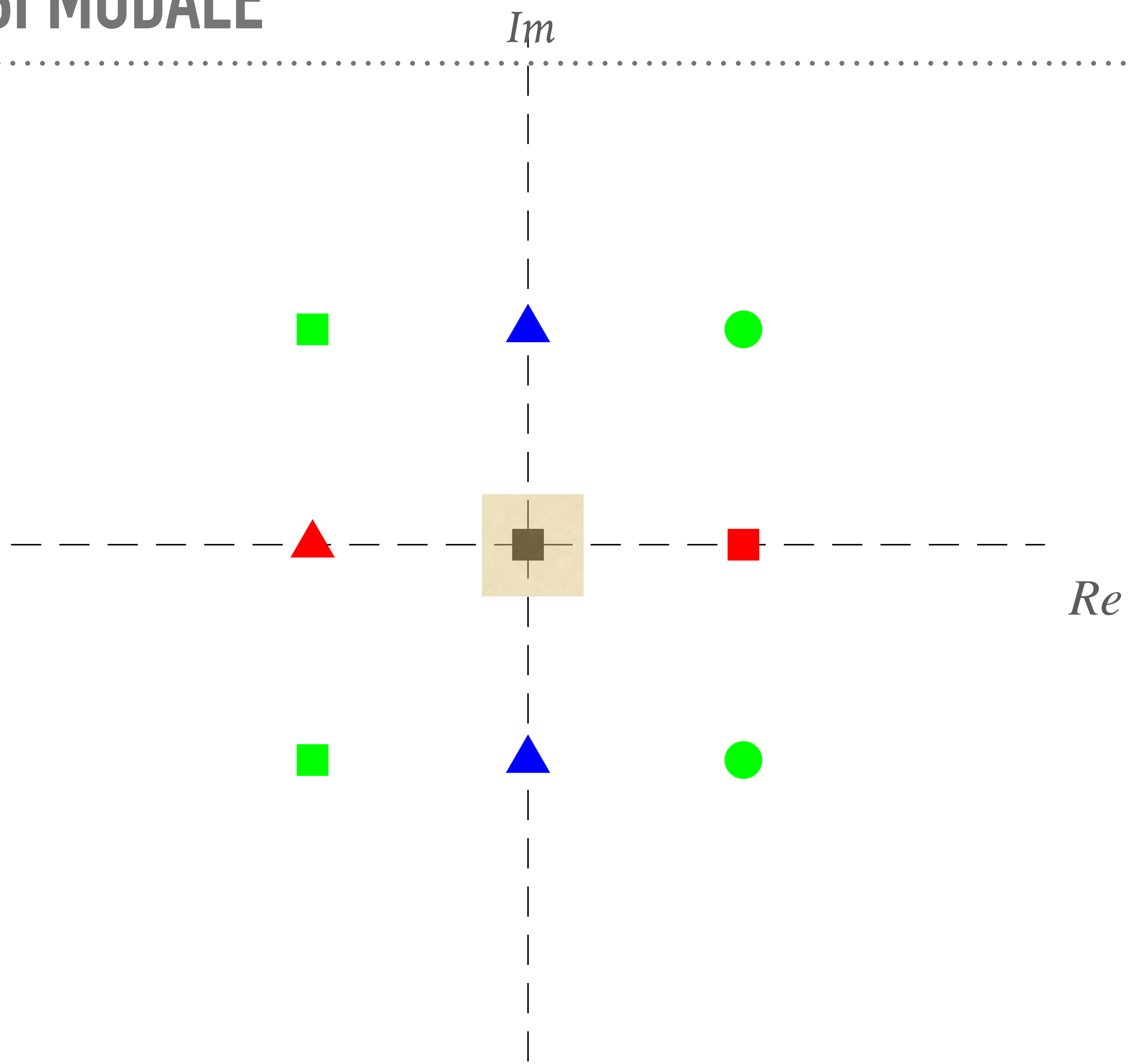
- Sotto opportune condizioni è possibile affermare che la quantità $e^{A\cdot t}\cdot x_0$ può essere riscritta come C.L. dei termini $e^{s_i\cdot t}$ (detti modi) con $s_i \in \mathbb{C}$ autovalore di A e $i = 1\cdots n$

$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i\cdot t}$ $\quad$ $s_i = \sigma_i \pm j\cdot\omega_i \in \mathbb{C} \rightarrow e^{\sigma_i\cdot t}sin(\omega_i t + \phi_i)$

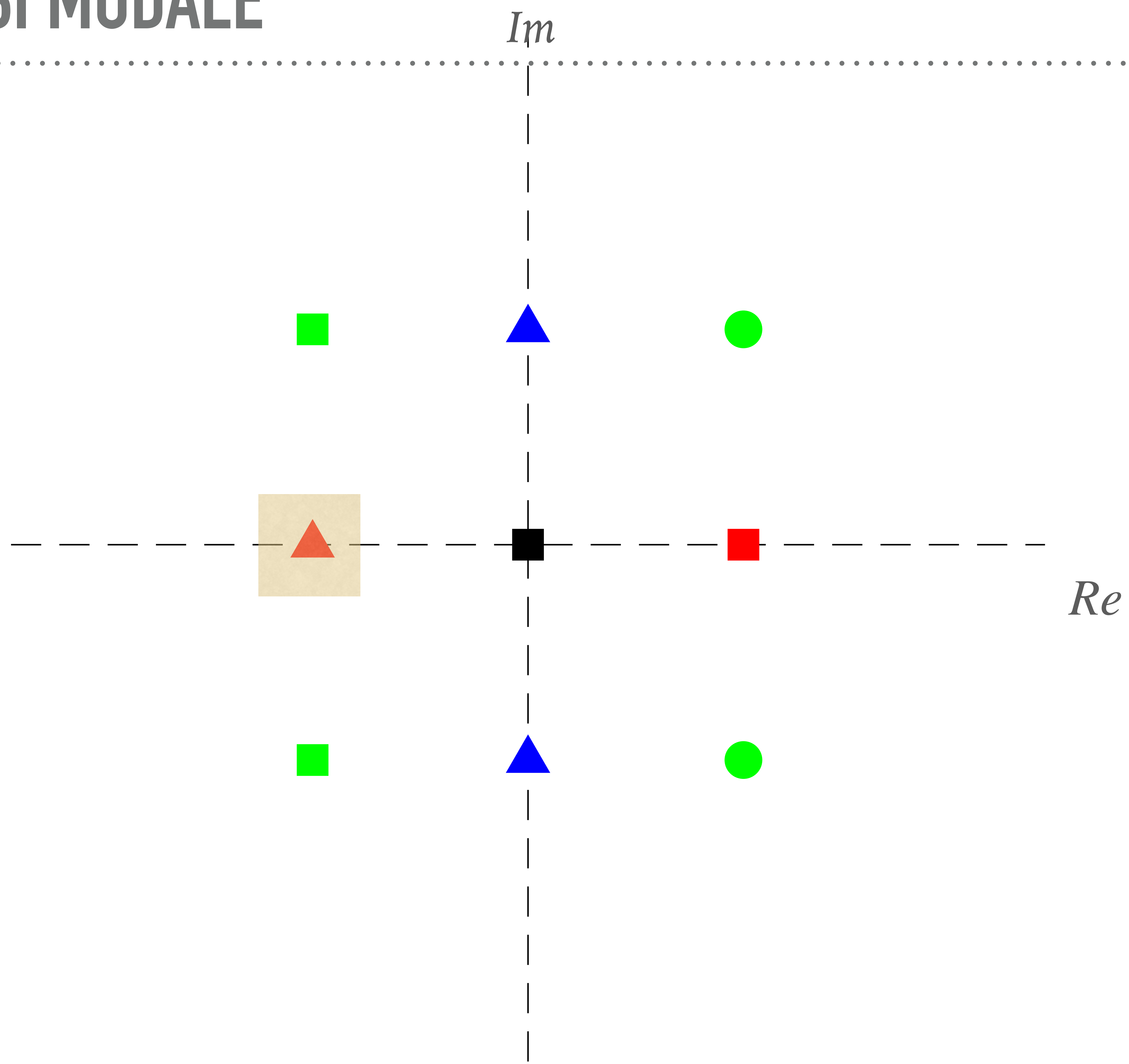
ANALISI MODALE



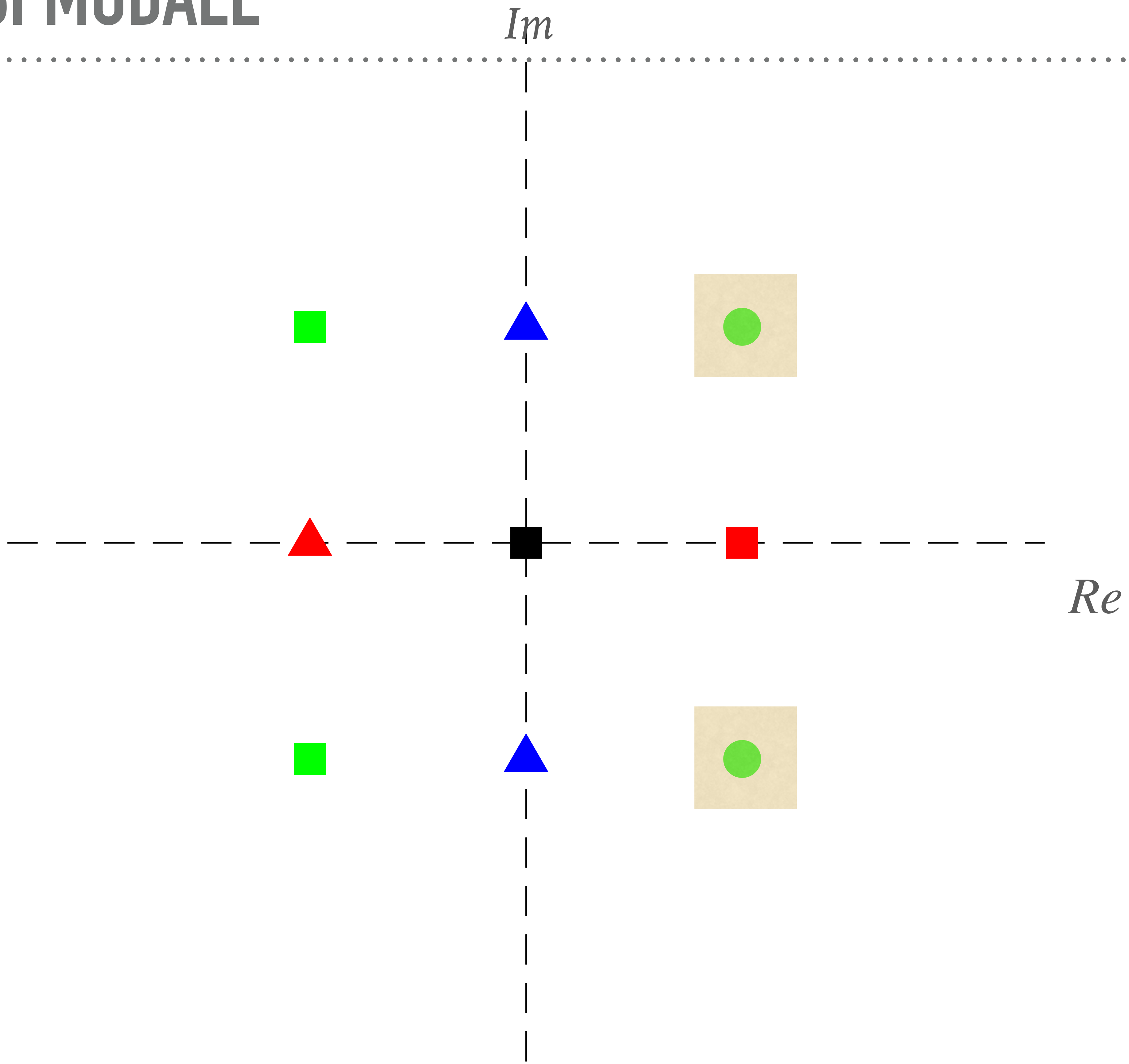
ANALISI MODALE



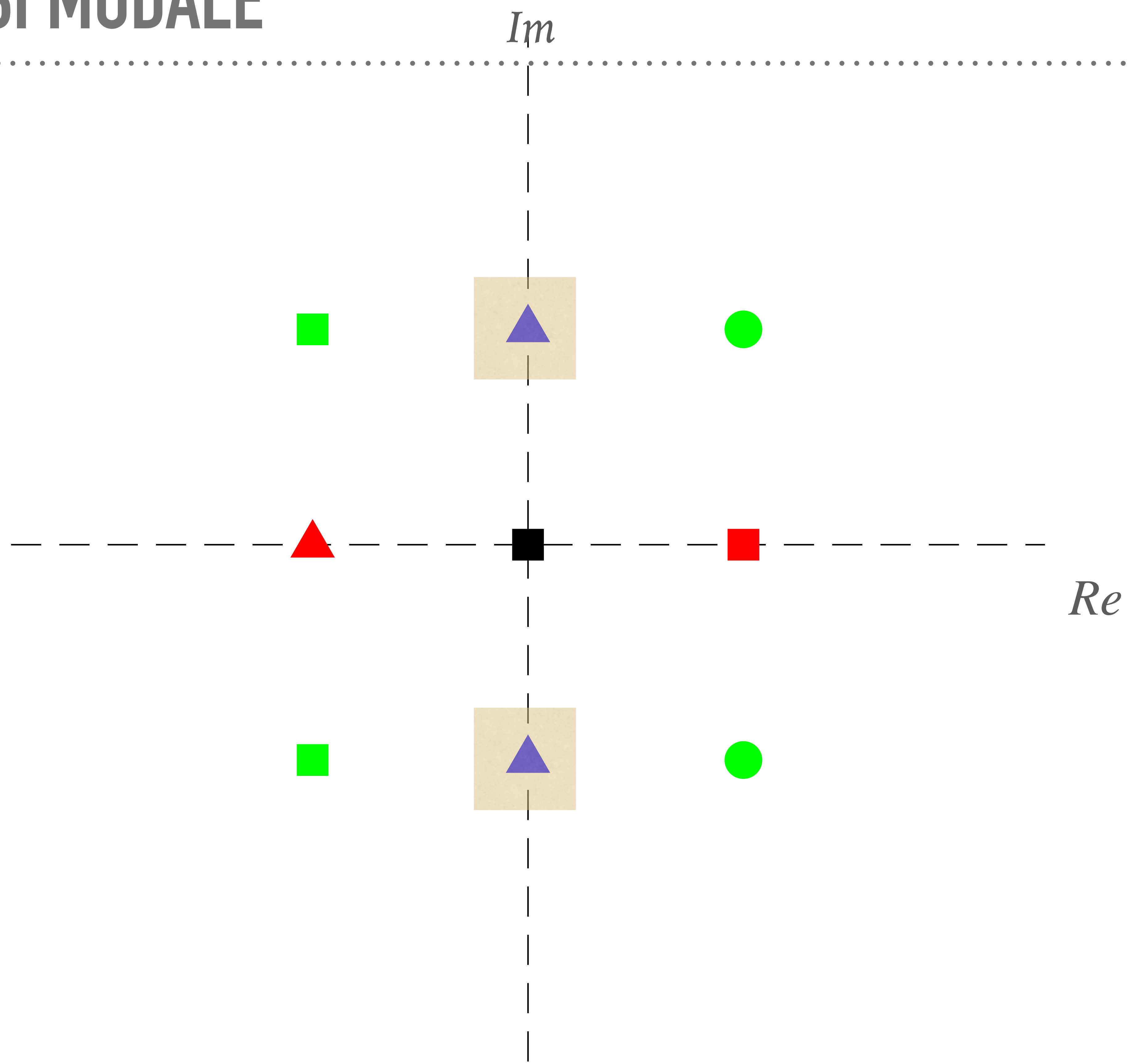
ANALISI MODALE



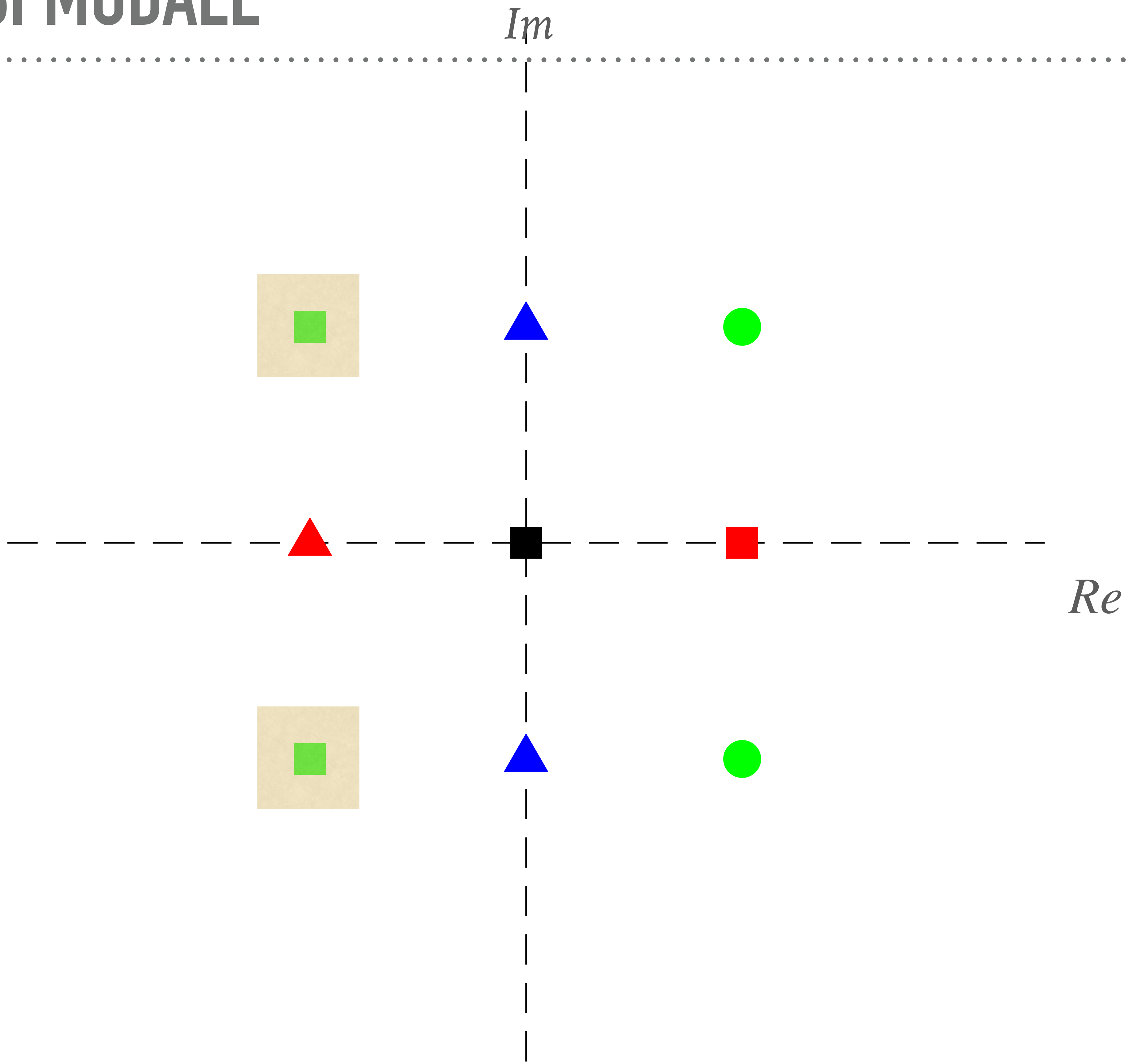
ANALISI MODALE



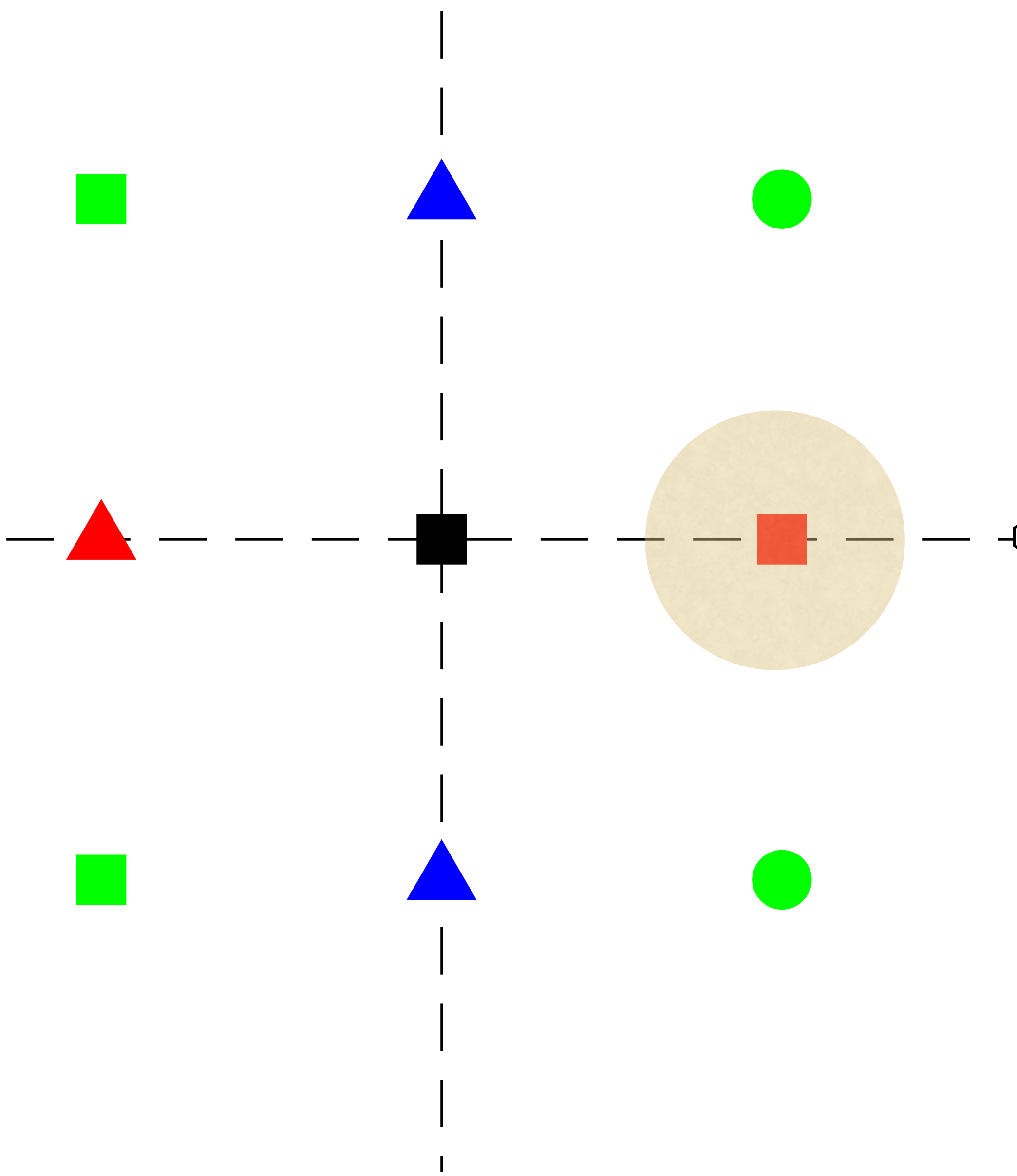
ANALISI MODALE

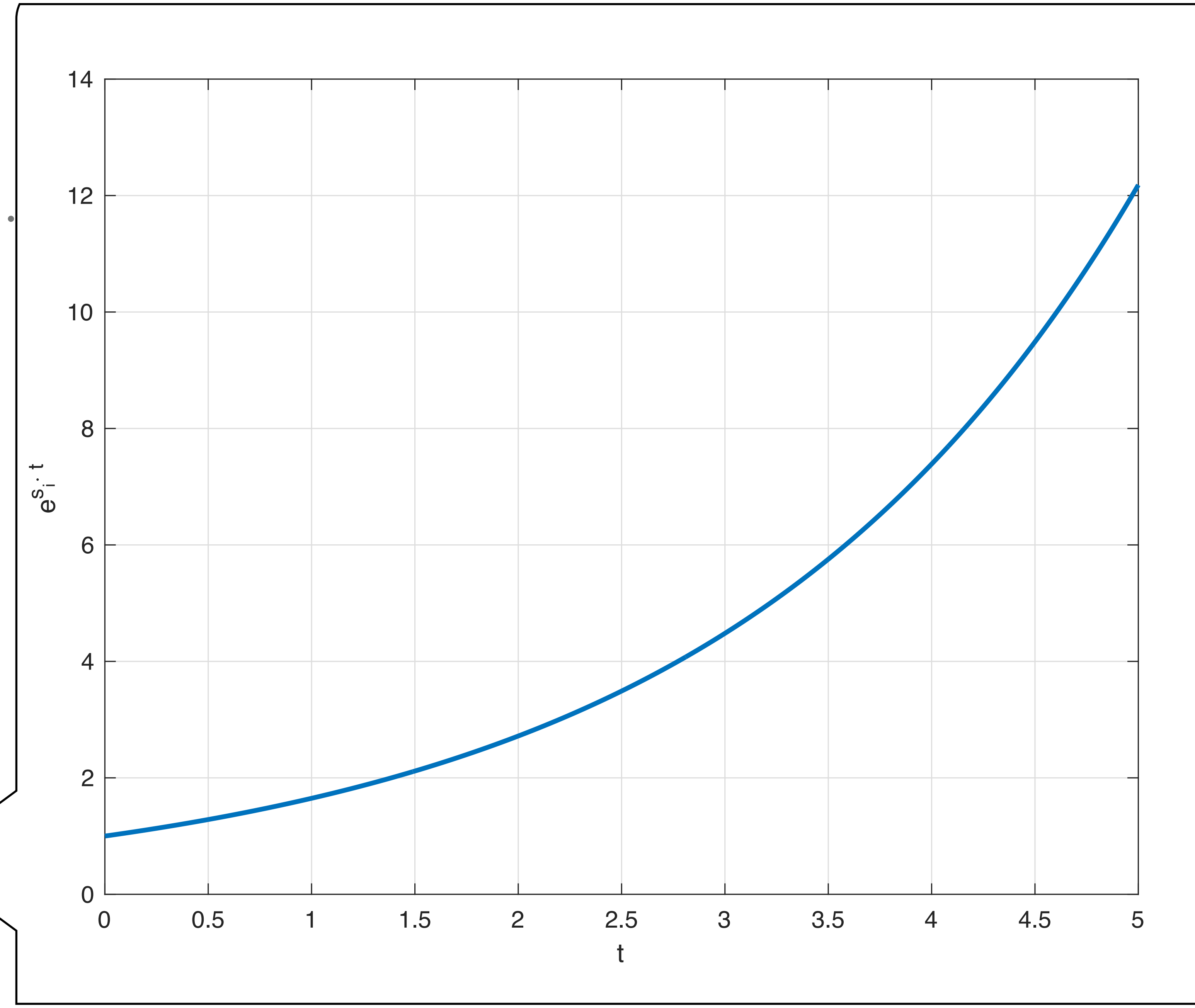


ANALISI MODALE



ANALISI MODALE

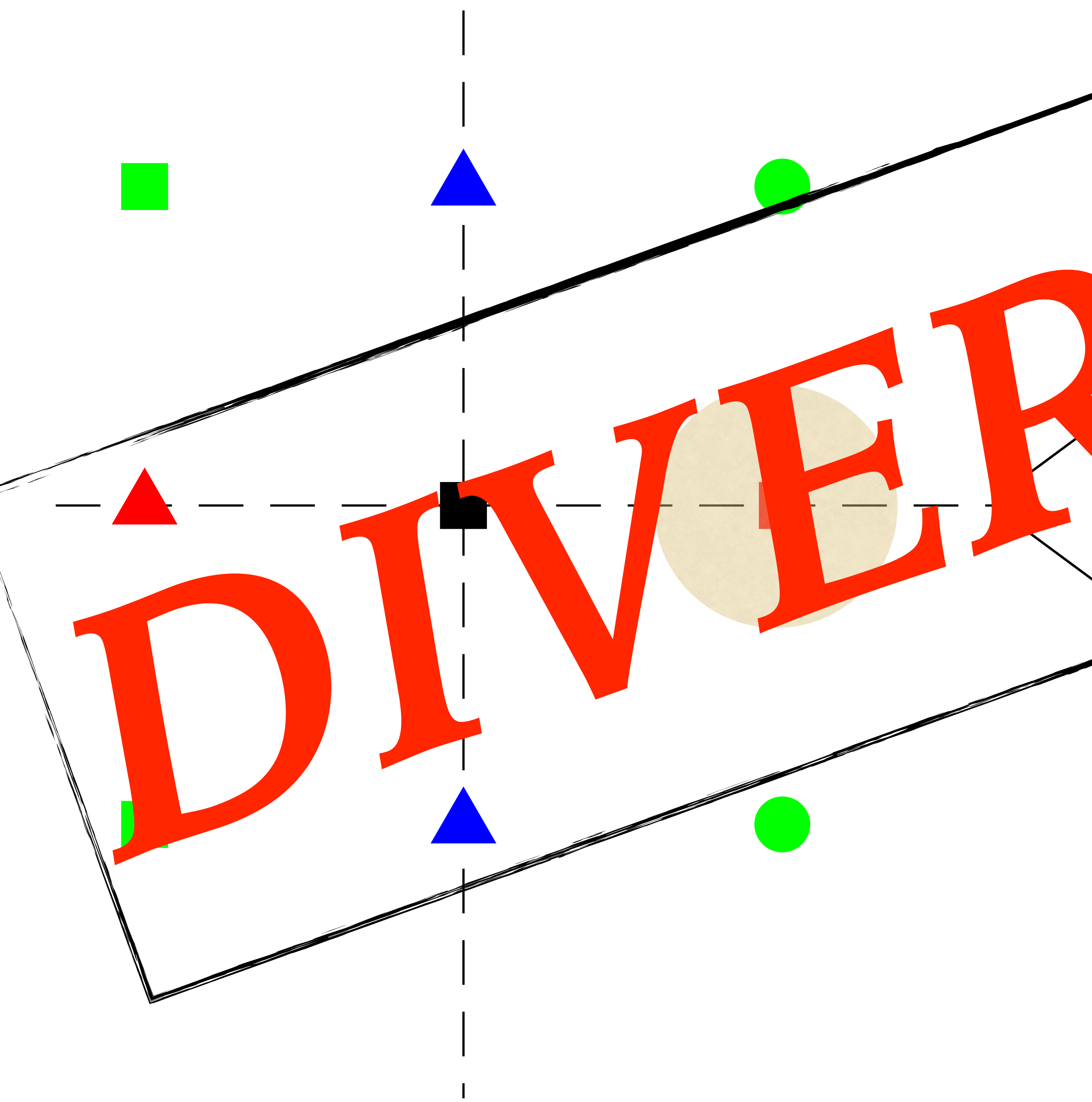


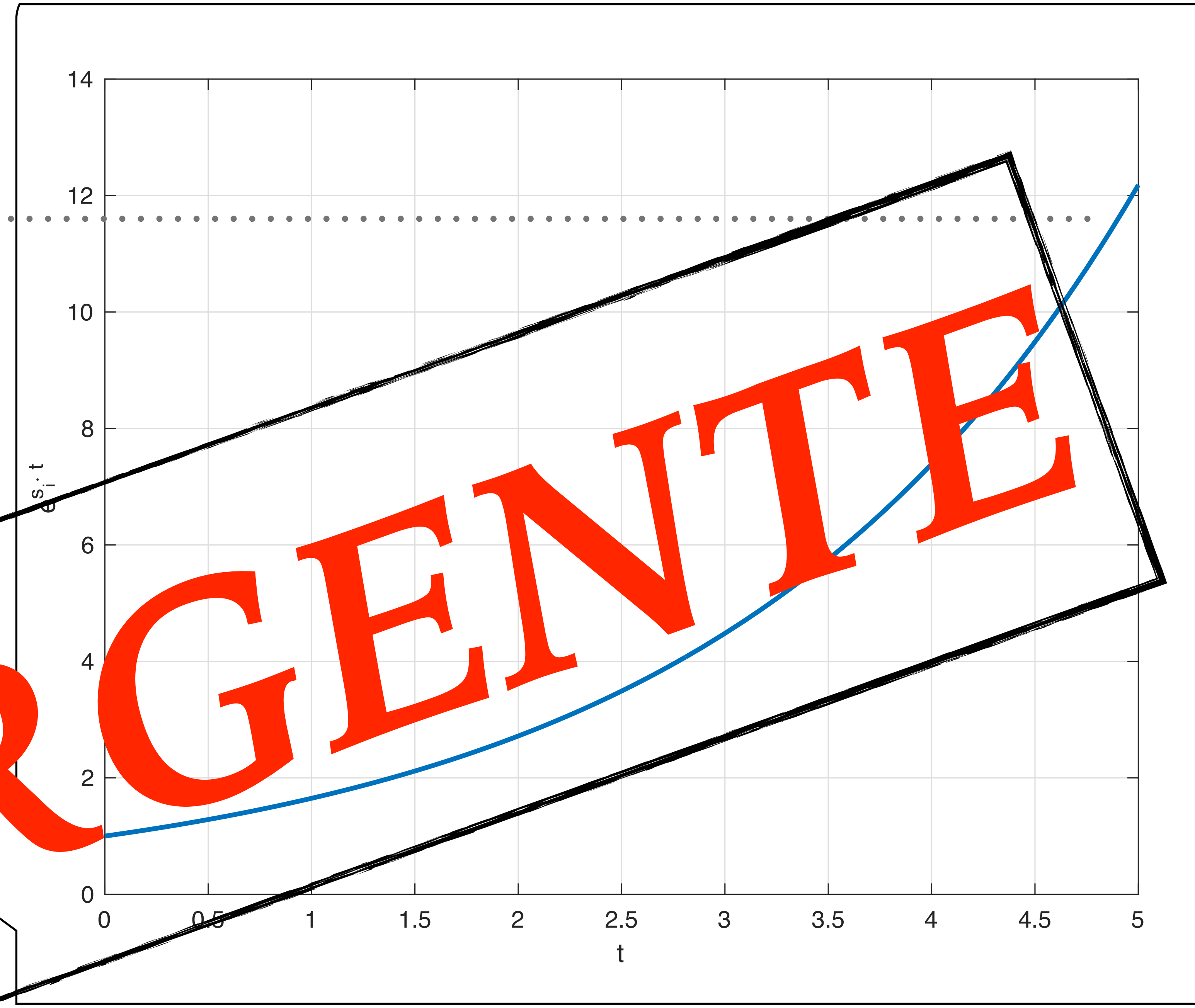


$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

$$s_i > 0$$

ANALISI MODALE

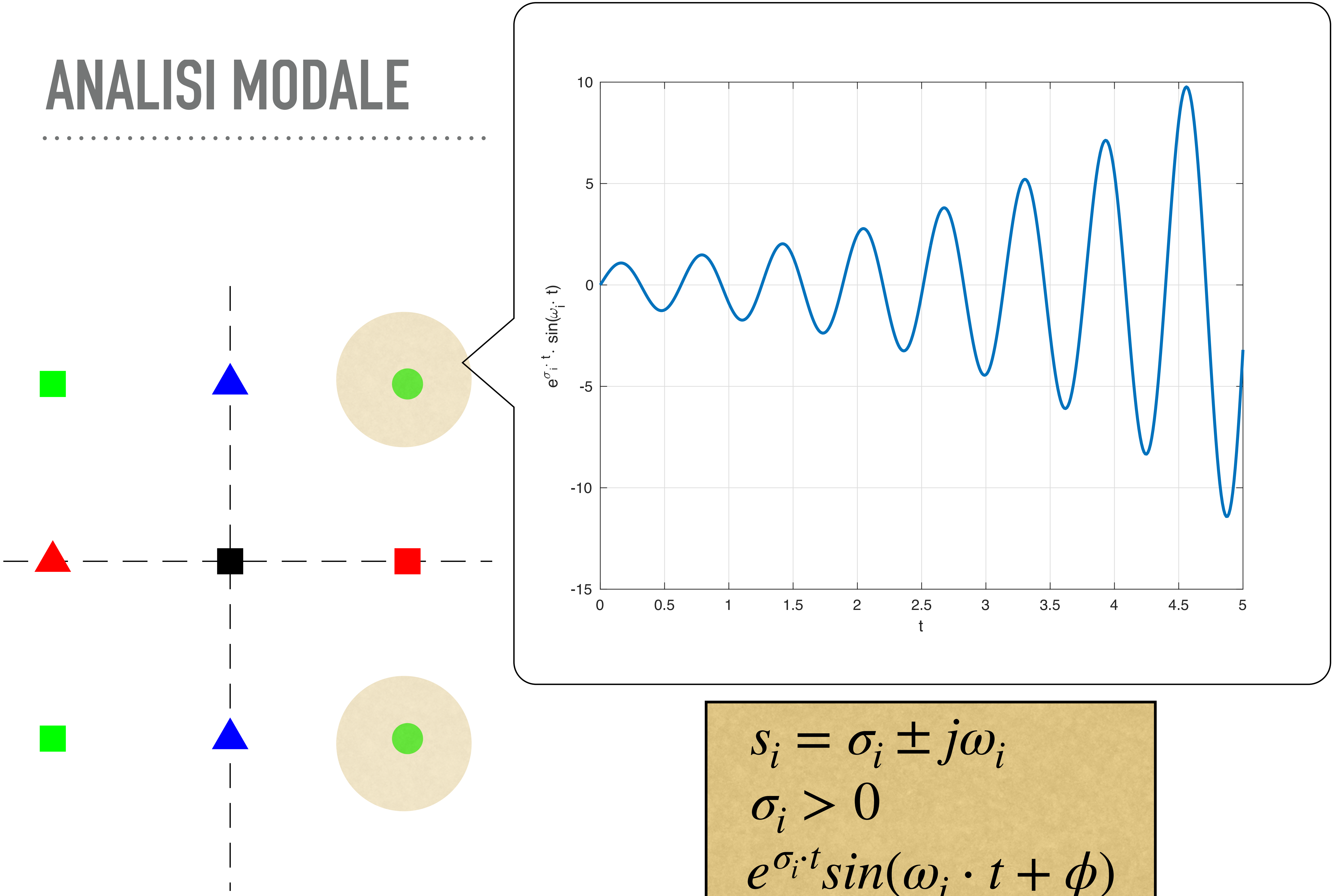




$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

$$s_i > 0$$

ANALISI MODALE

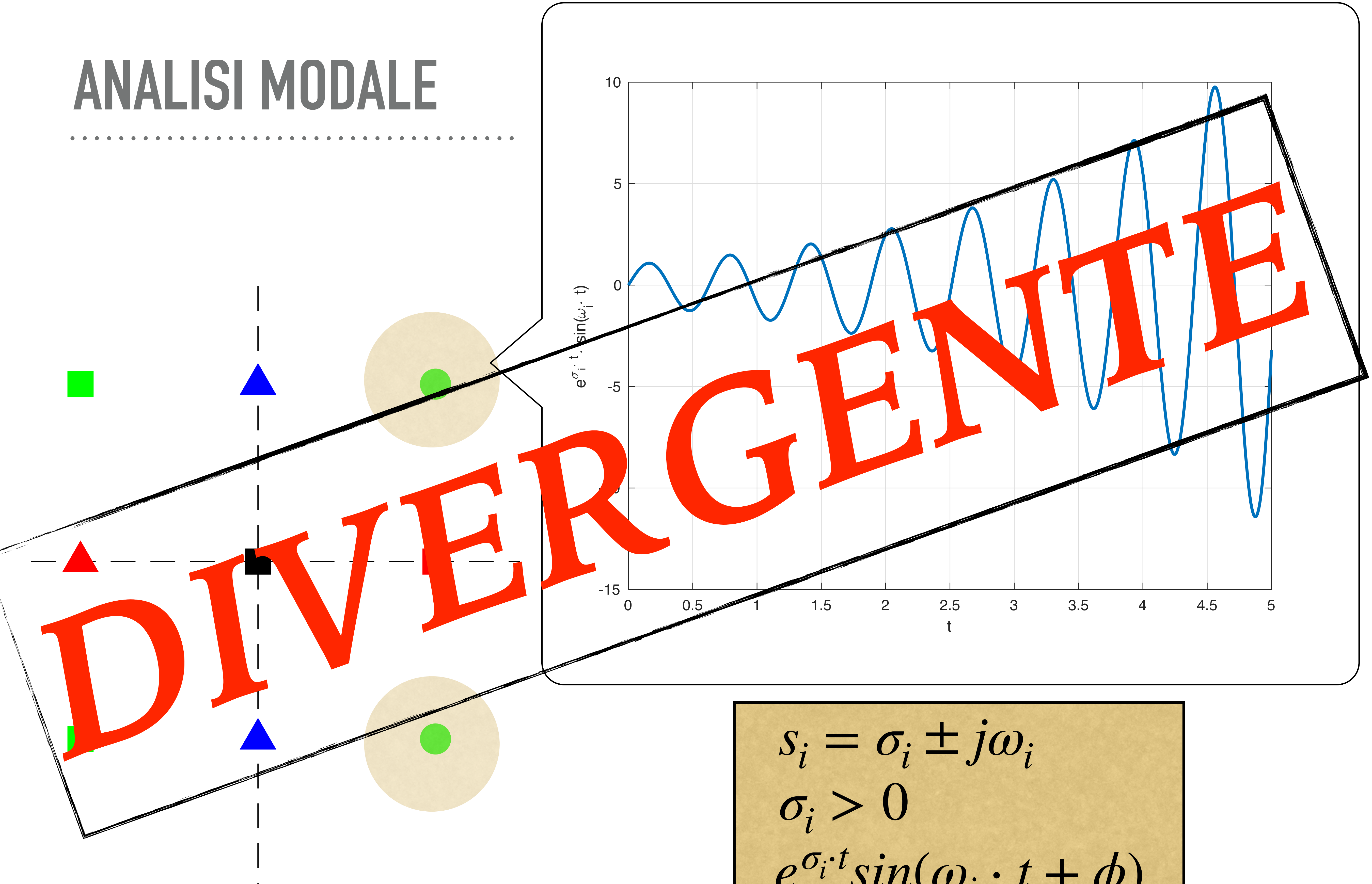


$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$

$$\sigma_i > 0$$

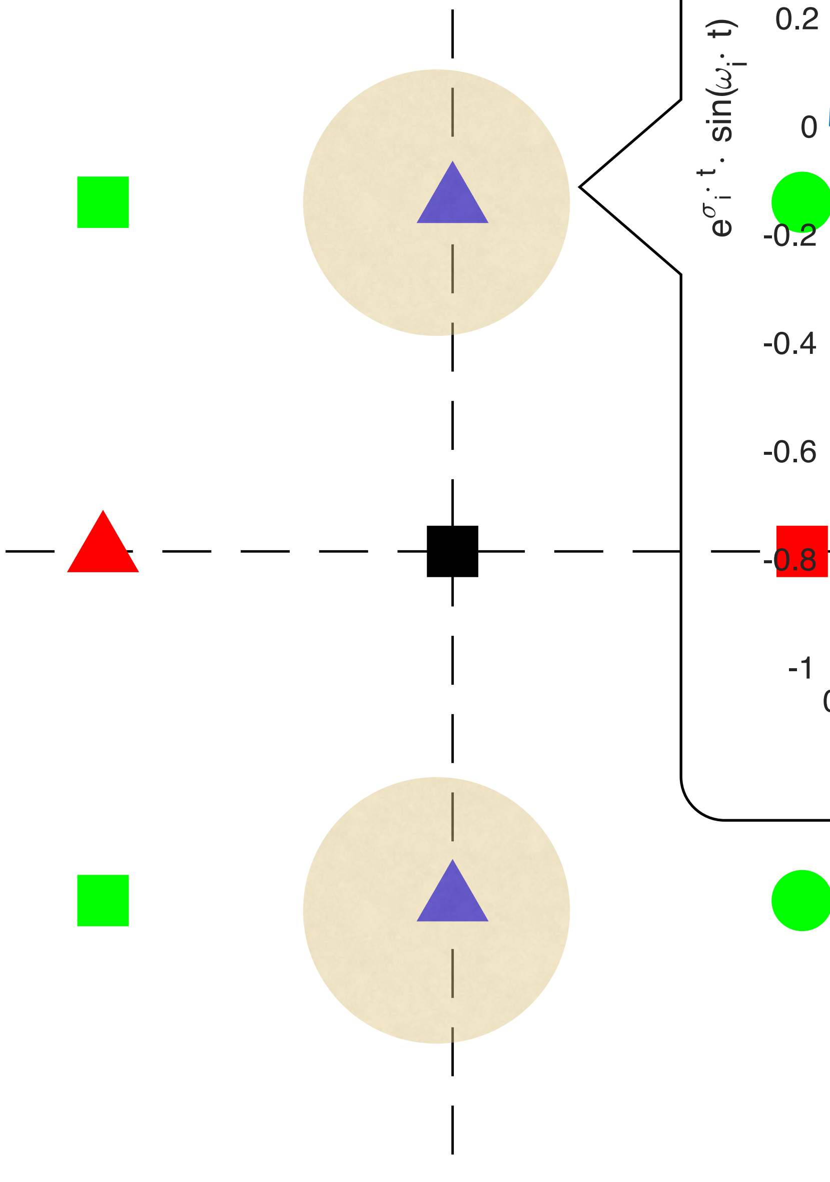
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

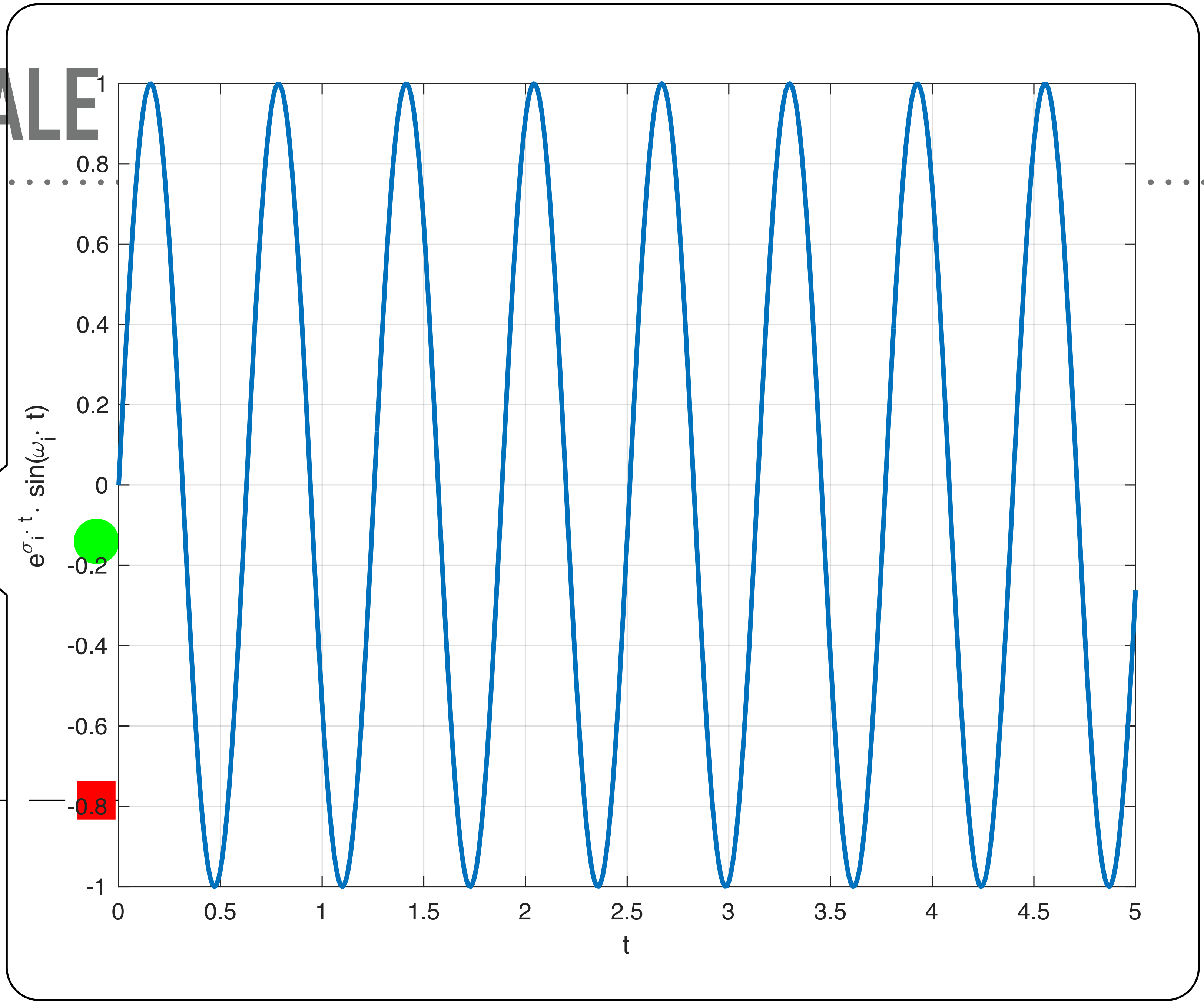
ANALISI MODALE



$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$
$$\sigma_i > 0$$
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

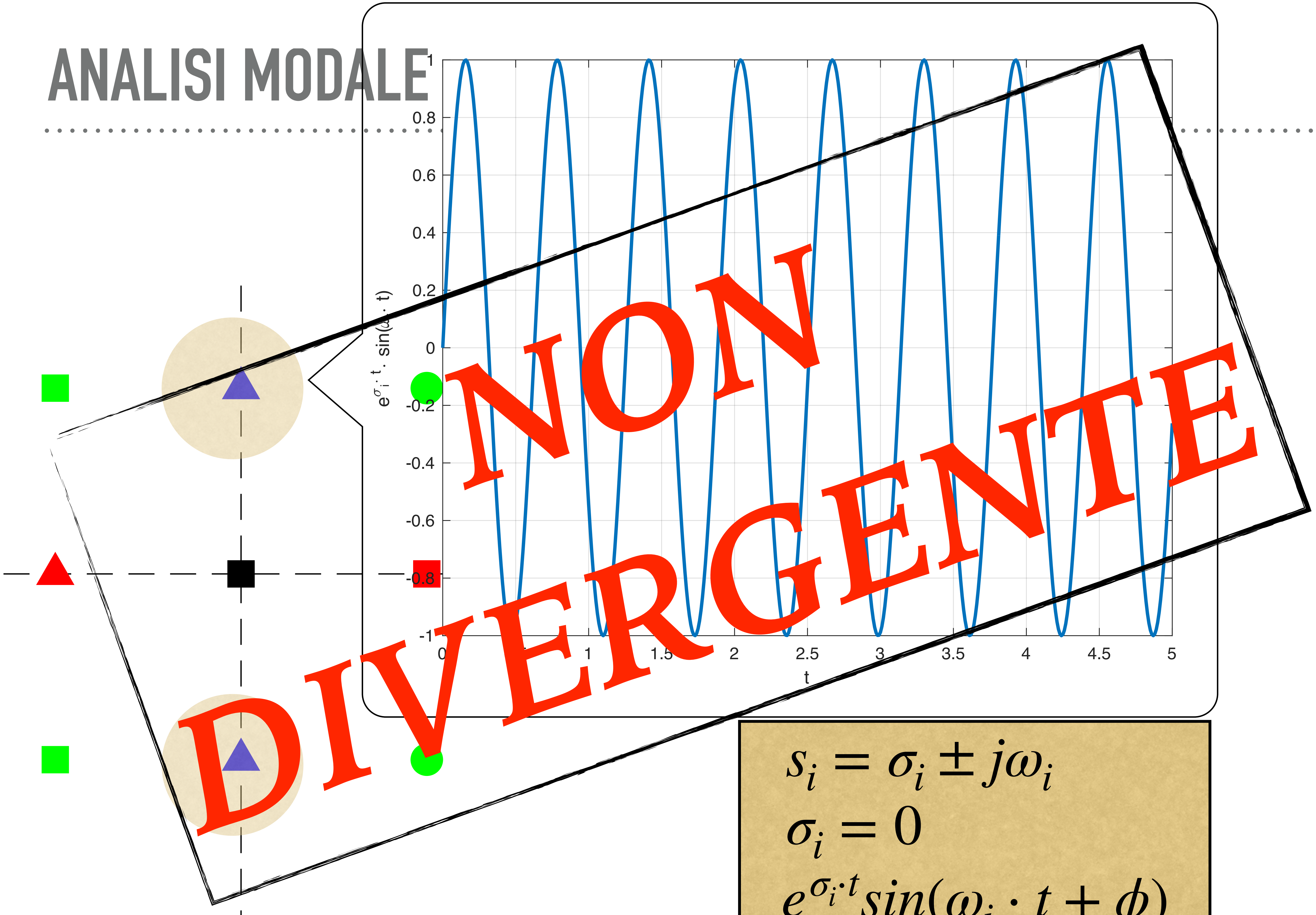
ANALISI MODALE





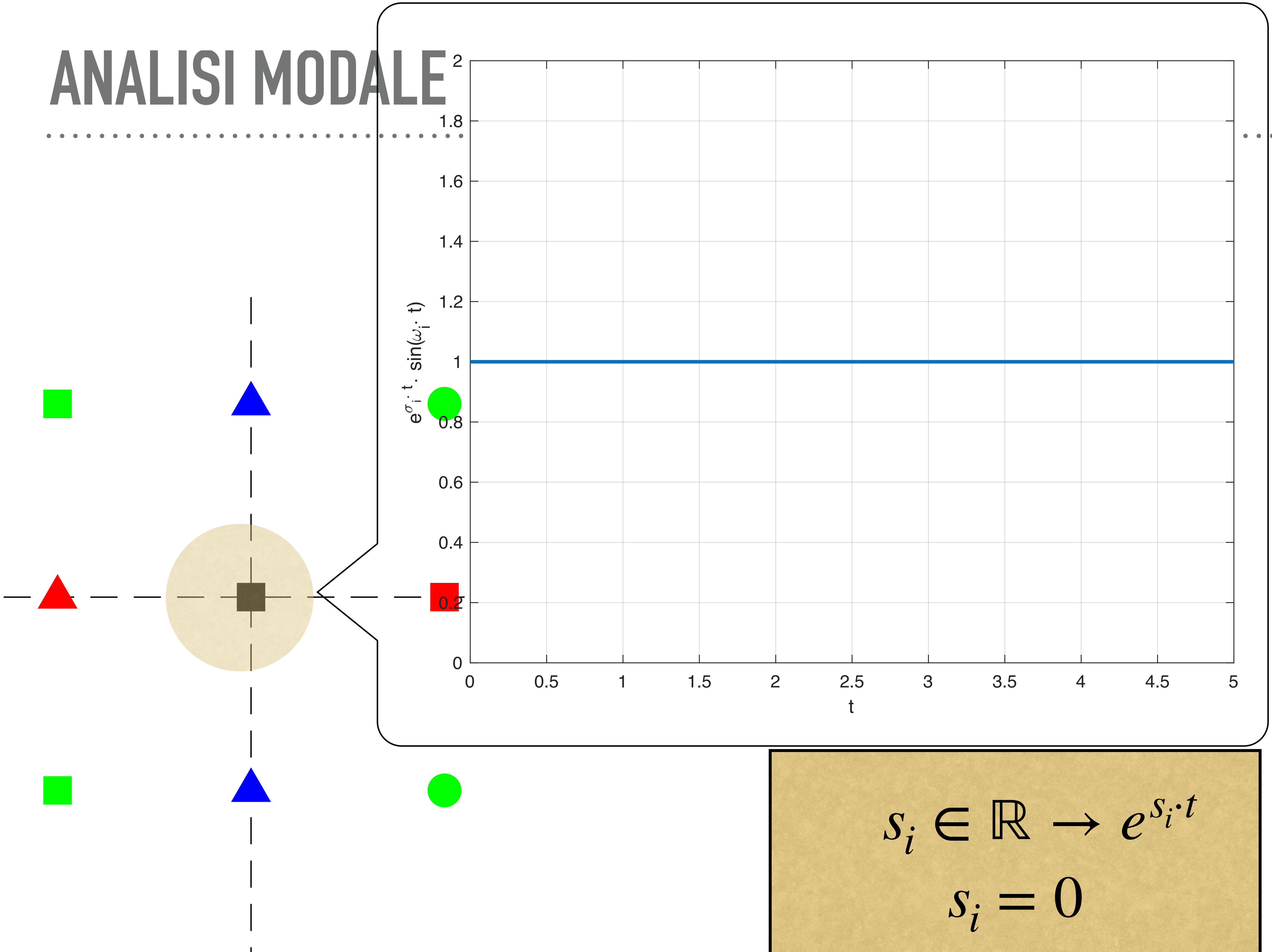
$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$
$$\sigma_i = 0$$
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

ANALISI MODALE



$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$
$$\sigma_i = 0$$
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

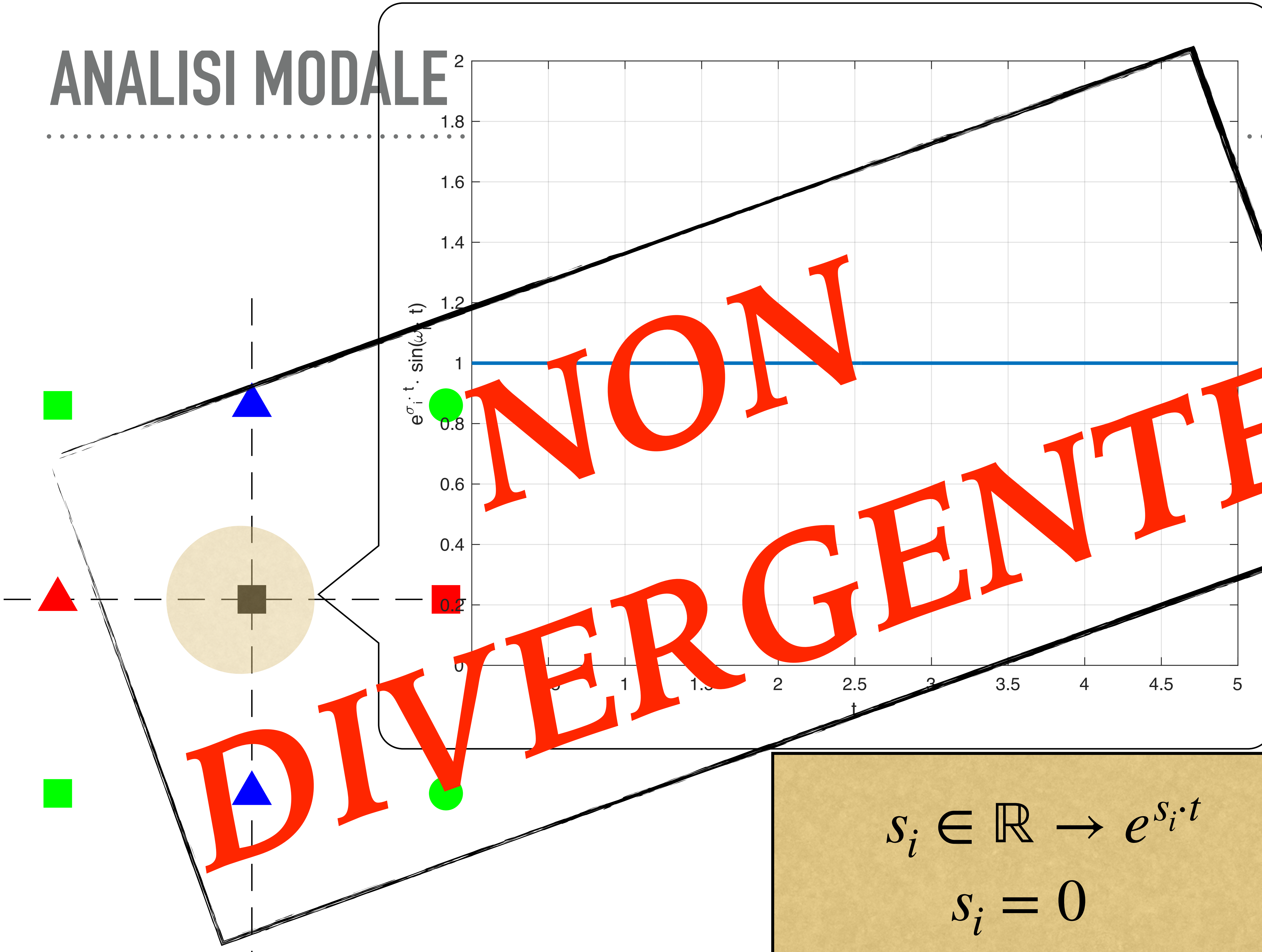
ANALISI MODALE



$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

$$s_i = 0$$

ANALISI MODALE

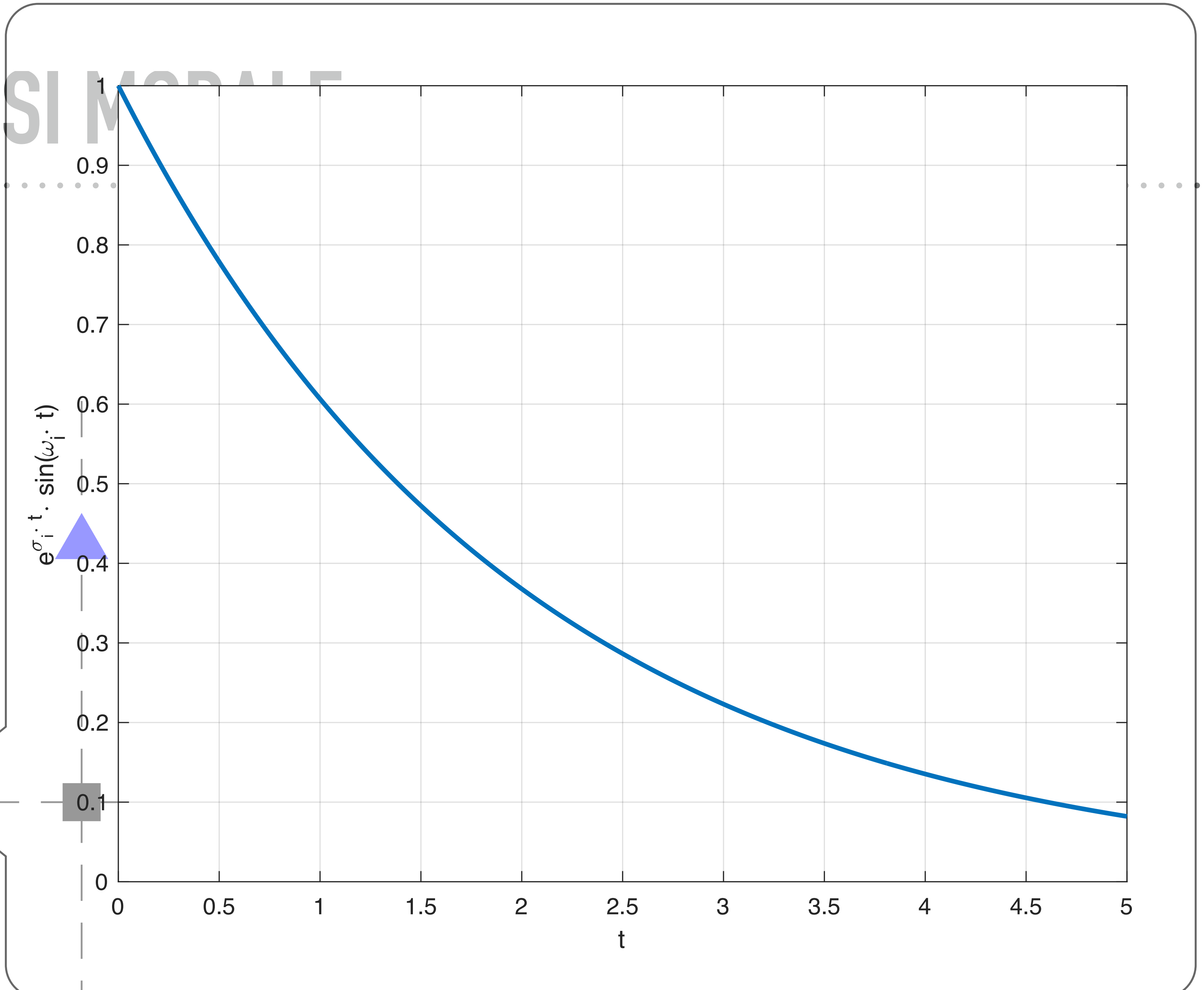


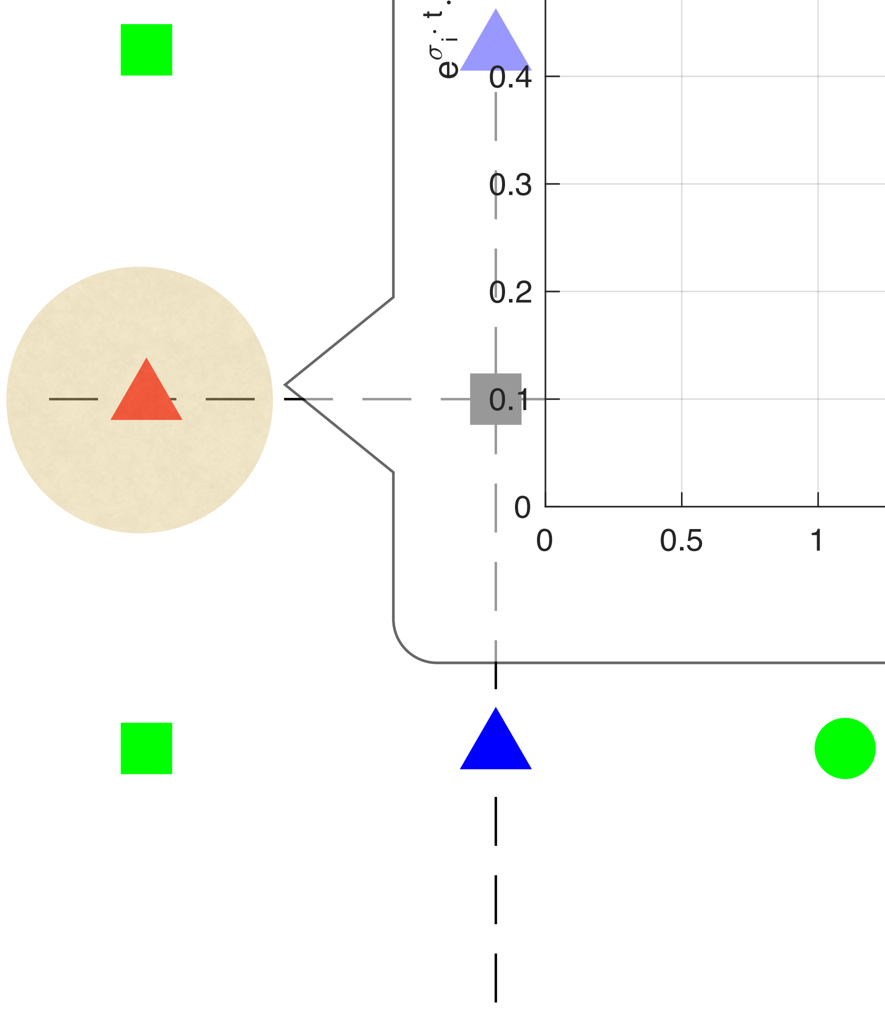
NON DIVERGENTE

$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

$$s_i = 0$$

ANALISI MODALE

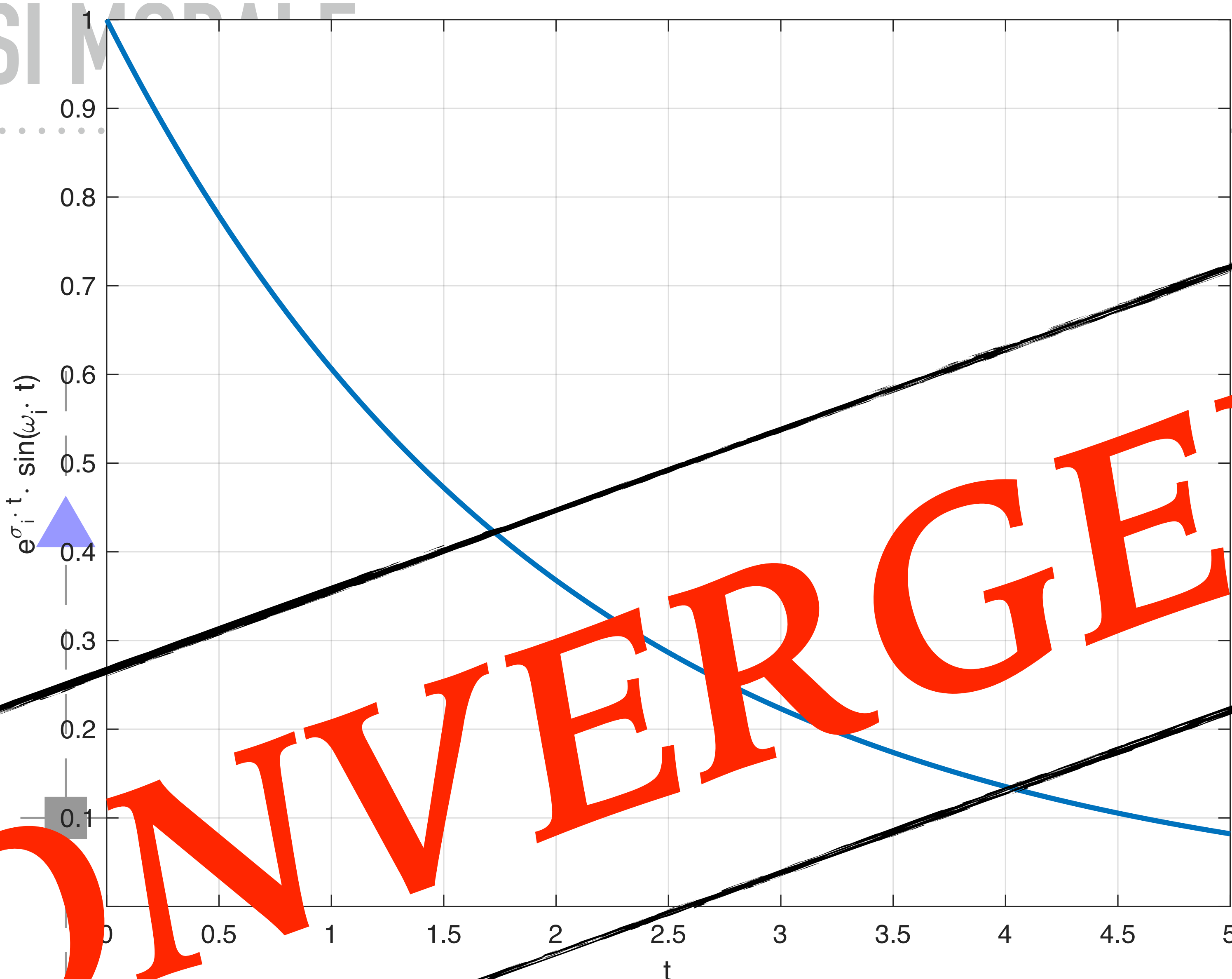




$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

$$s_i < 0$$

ANALISI MODALE

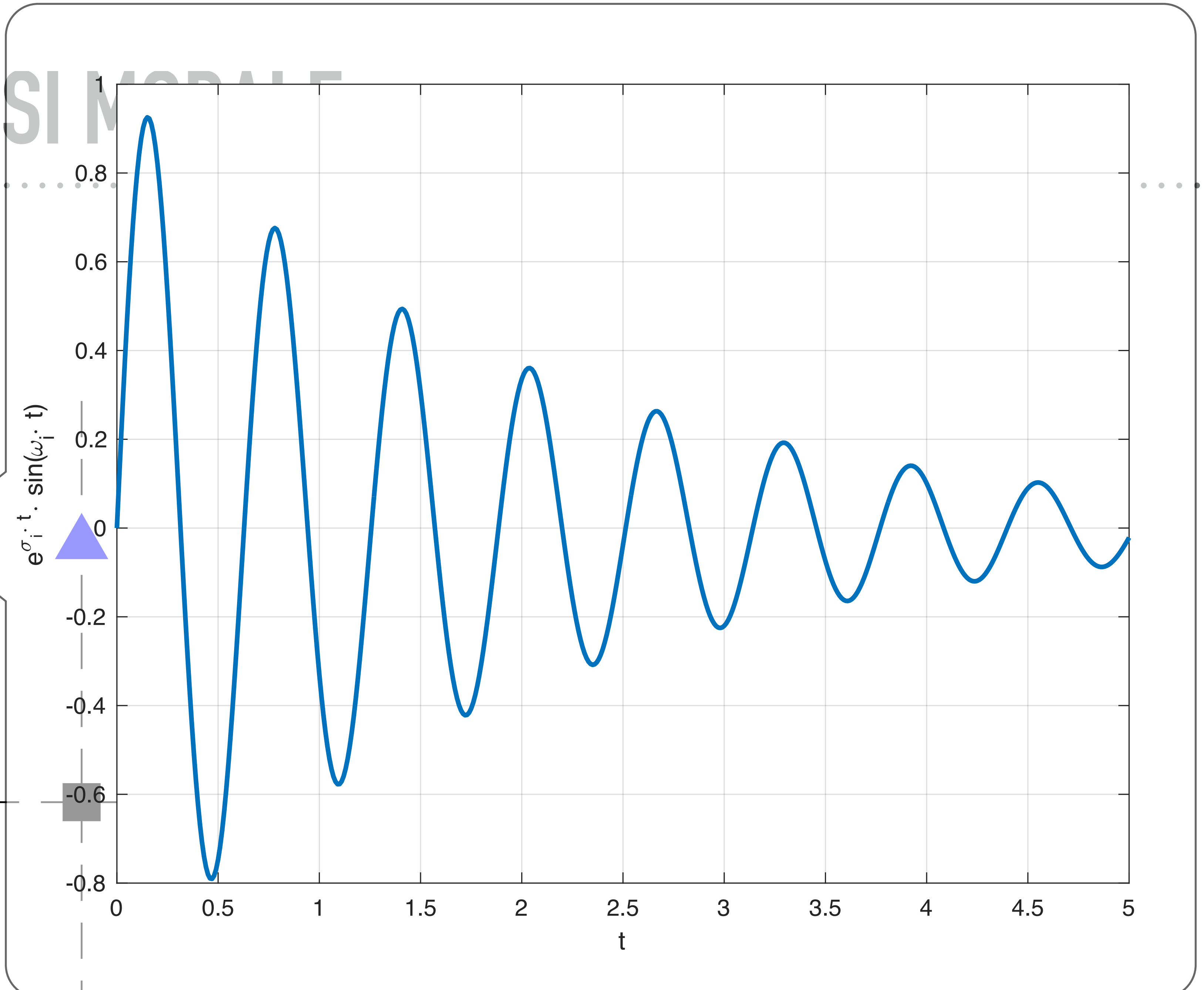


CONVERGENTE

$$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$$

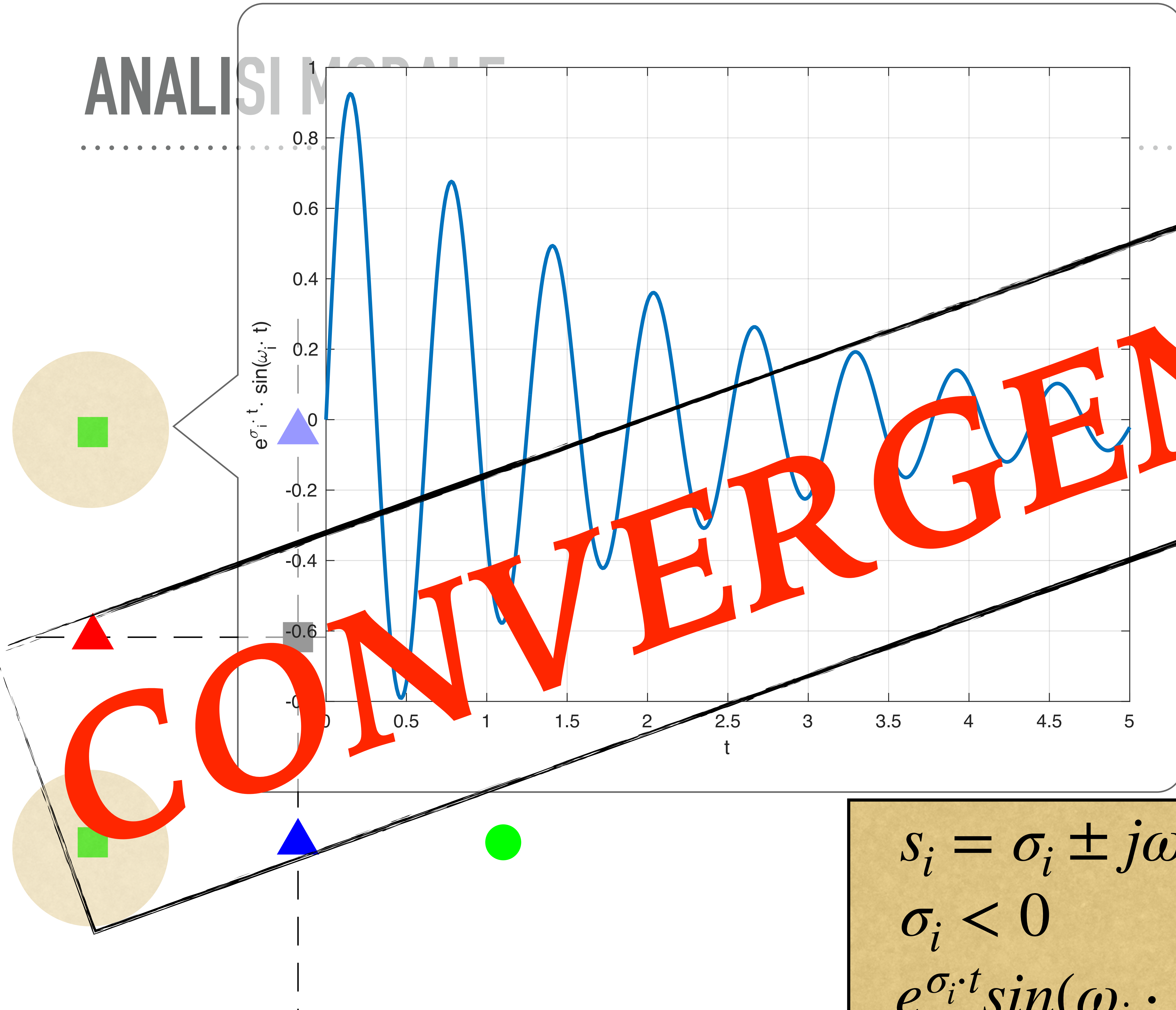
$$s_i < 0$$

ANALISI MODALE



$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$
$$\sigma_i < 0$$
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

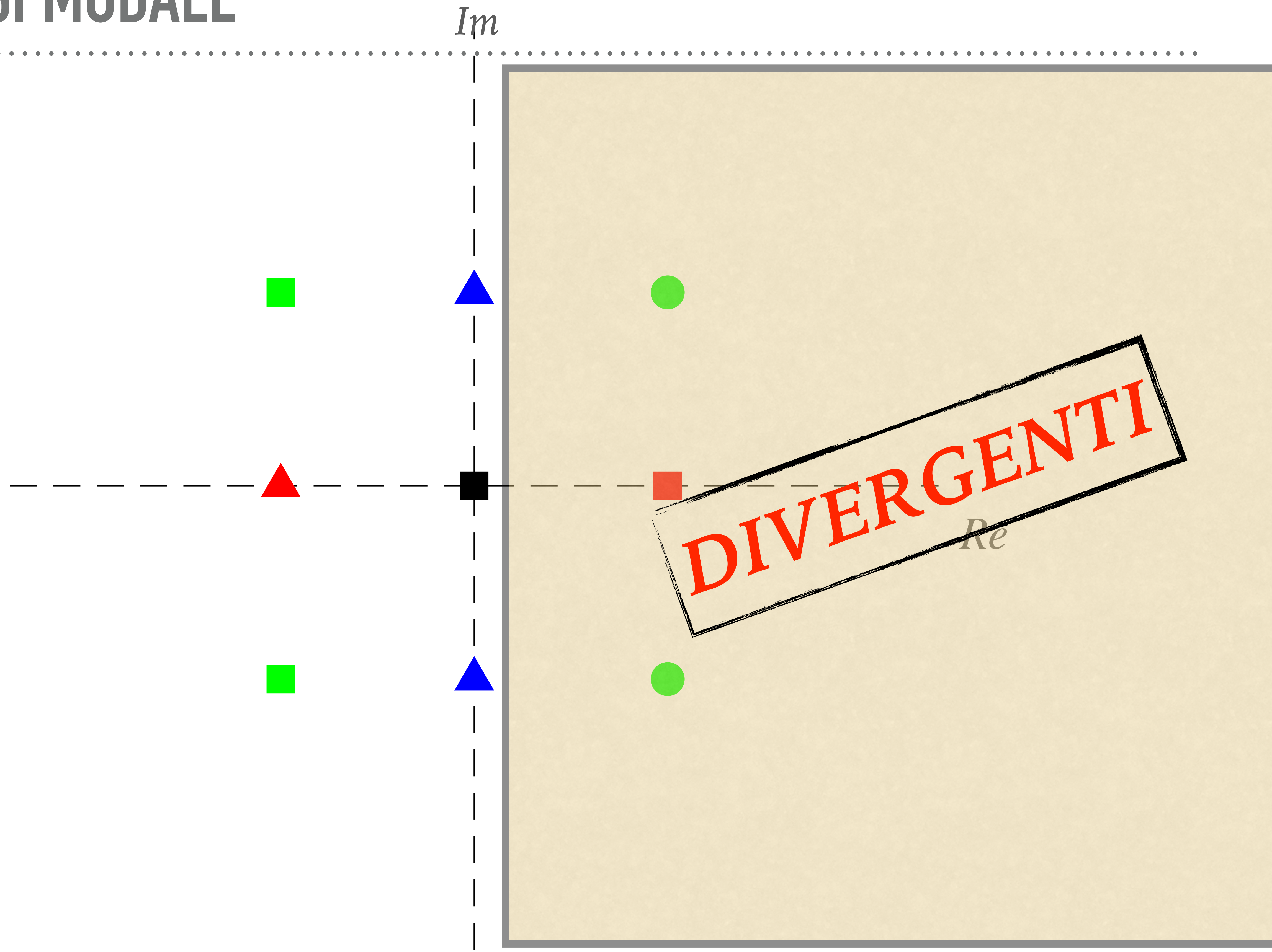
ANALISI M



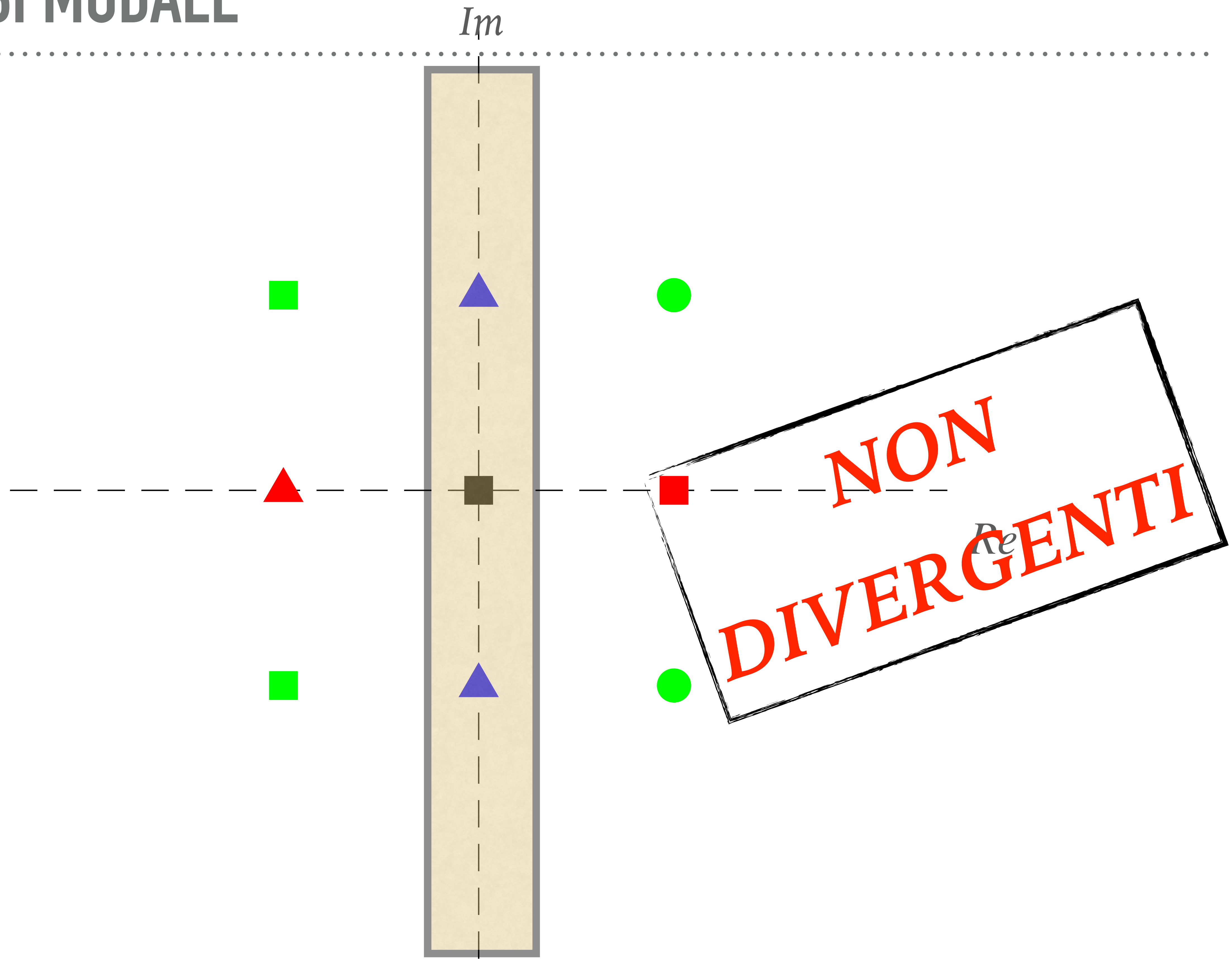
CONVERGENTE

$$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$$
$$\sigma_i < 0$$
$$e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i \cdot t + \phi)$$

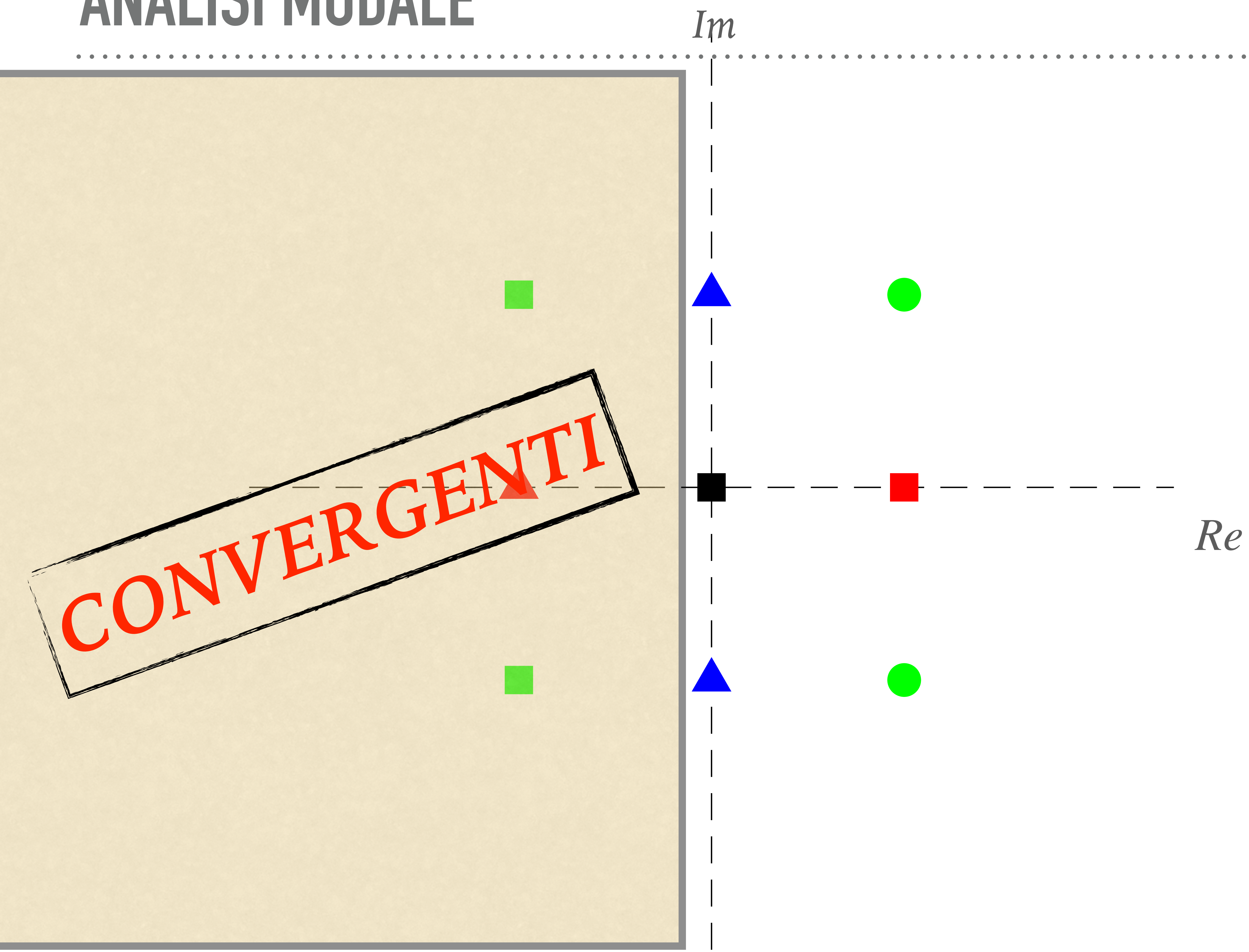
ANALISI MODALE



ANALISI MODALE



ANALISI MODALE



CARATTERIZZAZIONE STABILITA'

- Se i modi sono tutti **non divergenti** o **convergenti** la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **stabile**

- Tutti i modi sono **non divergenti** o **convergenti se e solo se** gli autovalori di A sono tutti a parte reale negativa o nulla

CARATTERIZZAZIONE ASINTOTICA STABILITA’

- Se i modi sono tutti **convergenti** la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **asintoticamente stabile**

- Tutti i modi sono convergenti se e solo se gli **autovalori di A sono tutti a parte reale negativa**

CARATTERIZZAZIONE INSTABILITA'

- Se esiste almeno un modo divergente la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **instabile**

- Esiste un modo divergente se e solo se **la matrice A possiede almeno un autovalore parte reale positiva**

ANALISI STABILITA'

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

- Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un **punto di equilibrio**

.

$$\begin{cases} A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{y} = C \cdot \bar{x} + D \cdot \bar{u} \end{cases}$$

Il tipo di stabilità, dipende dal segno della parte reale delle radici degli autovalori di A ovvero dal segno della parte reale delle radici del **polinomio caratteristico**

POLINOMIO CARATTERISTICO

- Si intende per polinomio caratteristico della matrice

$$p(\lambda) = |\lambda \cdot I - A| = \cdots \tag{7}$$

$$\cdots = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

Per studiare il segno della parte reale delle radici del polinomio caratteristico **<u>non</u>** risulta conveniente risolvere l'equazione

$$p(\lambda) = |\lambda \cdot I - A| = 0 \tag{8}$$

CRITERIO DI CARTESIO

- Si consideri una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con n=2

.

$$p(\lambda) = |\lambda \cdot I - A| = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 \tag{9}$$

Le radici del polinomio caratteristico sono tutte a parte reale minore di zero se e solo se i coefficienti di (9) sono tutti positivi

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_2 &> 0 \end{aligned} \tag{10}$$

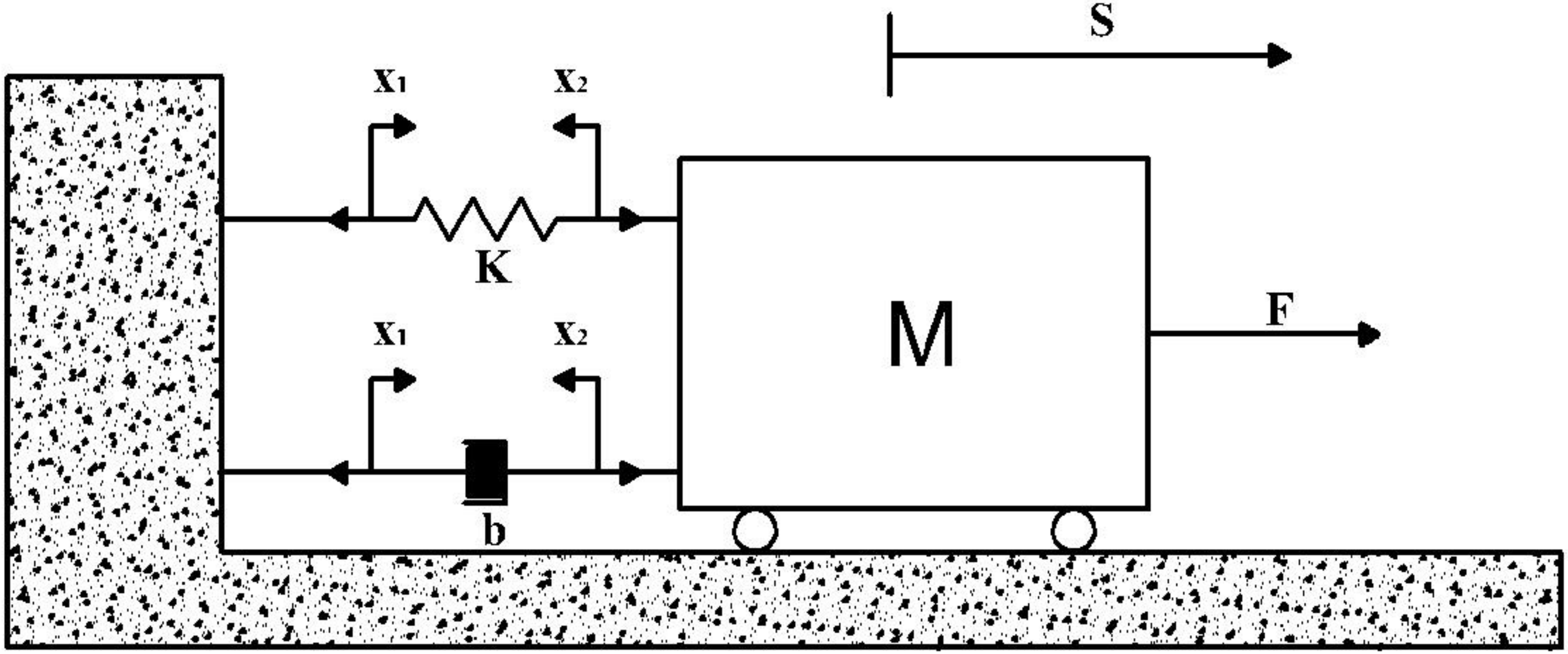
ESEMPIO#1

- Stabilire i valori di K che rendono Asintoticamente Stabile i punti di equilibrio del sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -k \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

ESERCIZIO



Si consideri il sistema rappresentato in figura. Siano ***M***=1 e ***K***=1. Si determi l'intervallo dei valori di ***b*** che rende il sistema asintoticamente stabile

CRITERIO DI ROUTH

- Si consideri una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$p(\lambda) = |\lambda \cdot I - A| = \cdots \tag{11}$$

$$\cdots = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

Le radici del polinomio caratteristico sono tutte a parte reale minore di zero se e solo se **i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh** sono positivi

TABELLA DI ROUTH

- La tabella di ROUTH possiede n+1 righe ed ha una struttura triangolare in quanto ogni due righe, con l'esclusione della prima se n è pari, il numero di elementi diminuisce di uno

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

TABELLA DI ROUTH

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\
n-1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\
n-2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & \\
n-3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & \\
n-4 & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & h_1 & & & & &
\end{array}$$

$$d_j = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_{j+1} \\ c_1 & c_{j+1} \end{vmatrix}}{-c_1}$$

TABELLA DI ROUTH

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\
n-1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\
n-2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & \\
n-3 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & \\
n-4 & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
0 & h_1 & & & & &
\end{array}$$

$$d_j = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_{j+1} \\ c_1 & c_{j+1} \end{vmatrix}}{-c_1}$$

ESEMPIO#2

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 15\lambda^4 + 85\lambda^3 + 225\lambda^2 + 274\lambda + 120$$

ESEMPIO#2

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 15\lambda^4 + 85\lambda^3 + 225\lambda^2 + 274\lambda + 120$$

5	1	85	274
4	15	225	120
3	70	266	
2	168	120	
1	216		
0	120		

Il criterio di Routh è soddisfatto dunque il polinomio possiede tutte le radici a parte reale negativa

CASO PARTICOLARE TABELLA DI ROUTH

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \cdots + a_n$$

$$\begin{array}{c|cccccc}
n & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\
n-1 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\
n-2 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots & \\
n-3 & \vdots & & & & & \\
n-4 & 0 & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}$$

Se nella prima colonna compare elemento nullo una possibile soluzione è quella di studiare il segno della parte reale delle radici di

$$q(\lambda) = p(\lambda)\cdot(\lambda + m) \qquad m > 0$$

CASO PARTICOLARE TABELLA DI ROUTH

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 10$$