

Automatica

A.A. 2023/2024

MODELLISTICA

SISTEMI

ELETTRICI

**ELEMENTO
RESISTIVO**

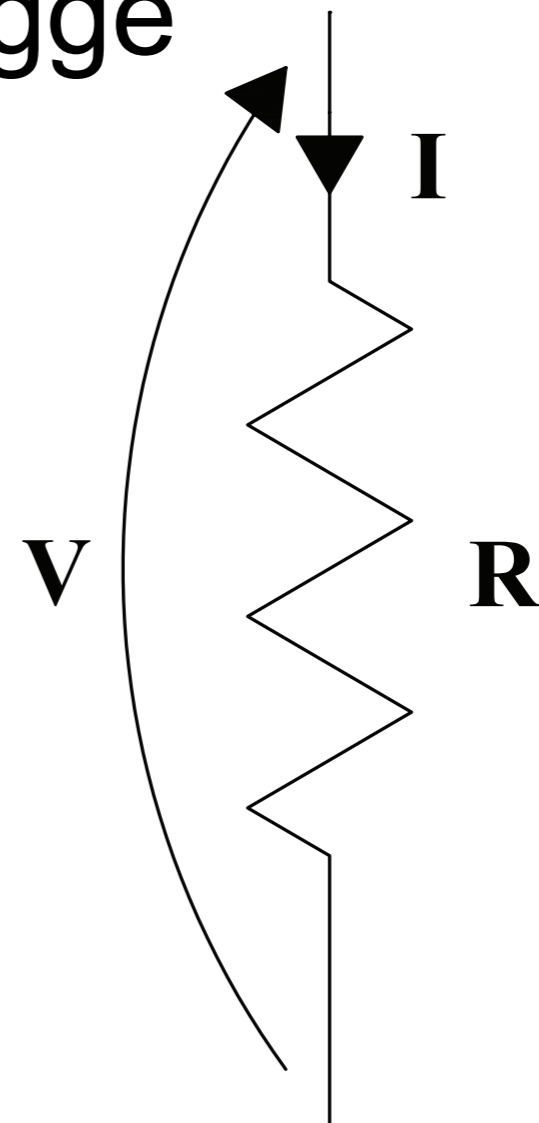
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO RESISTIVO

Resistore

- **Def.** Un resistore è un bipolo ideale (privo di capacità ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = R \cdot I$$

$$[R] = \frac{[\textit{volt}]}{[\textit{ampere}]} = [\textit{ohm}]$$



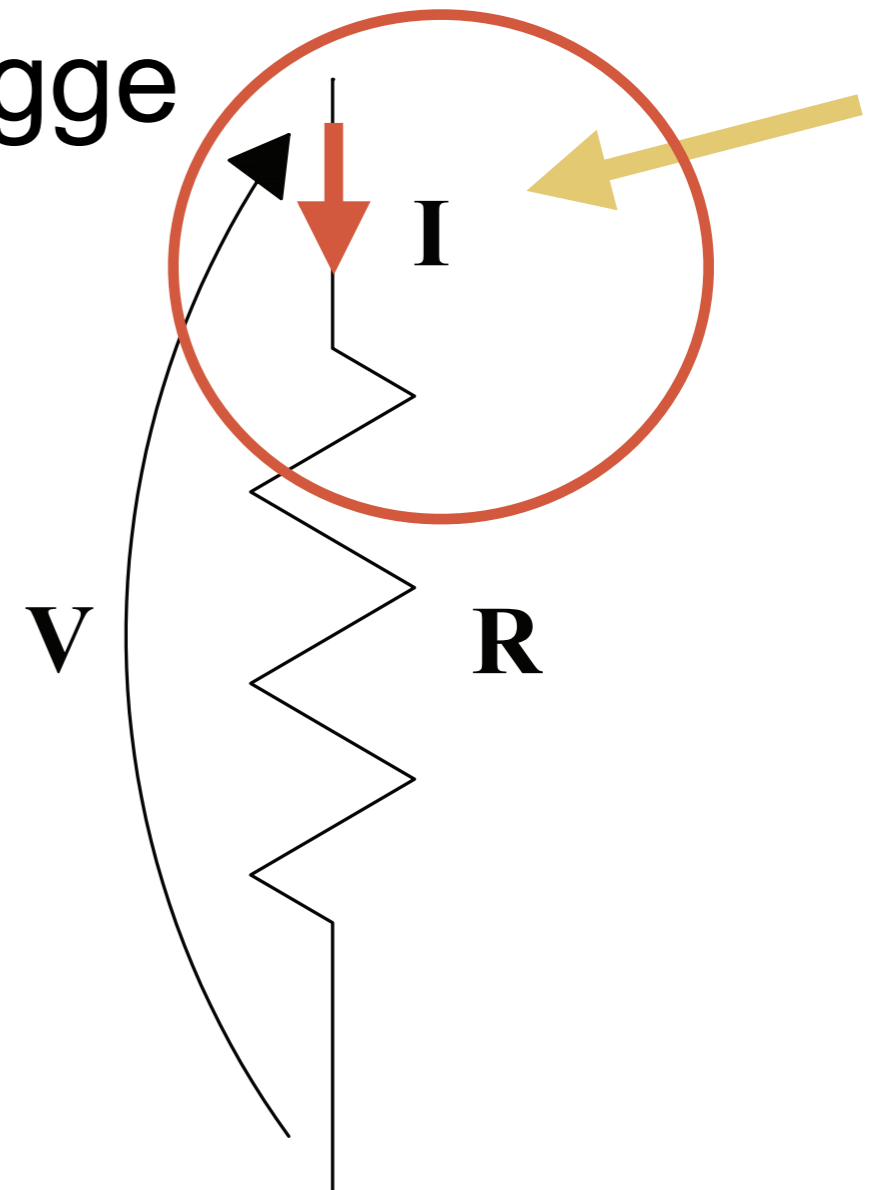
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO RESISTIVO

Resistore

- **Def.** Un resistore è un bipolo ideale (privo di capacità ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = R \cdot I$$

$$[R] = \frac{[\textit{voltage}]}{[\textit{ampere}]} = [\textit{ohm}]$$



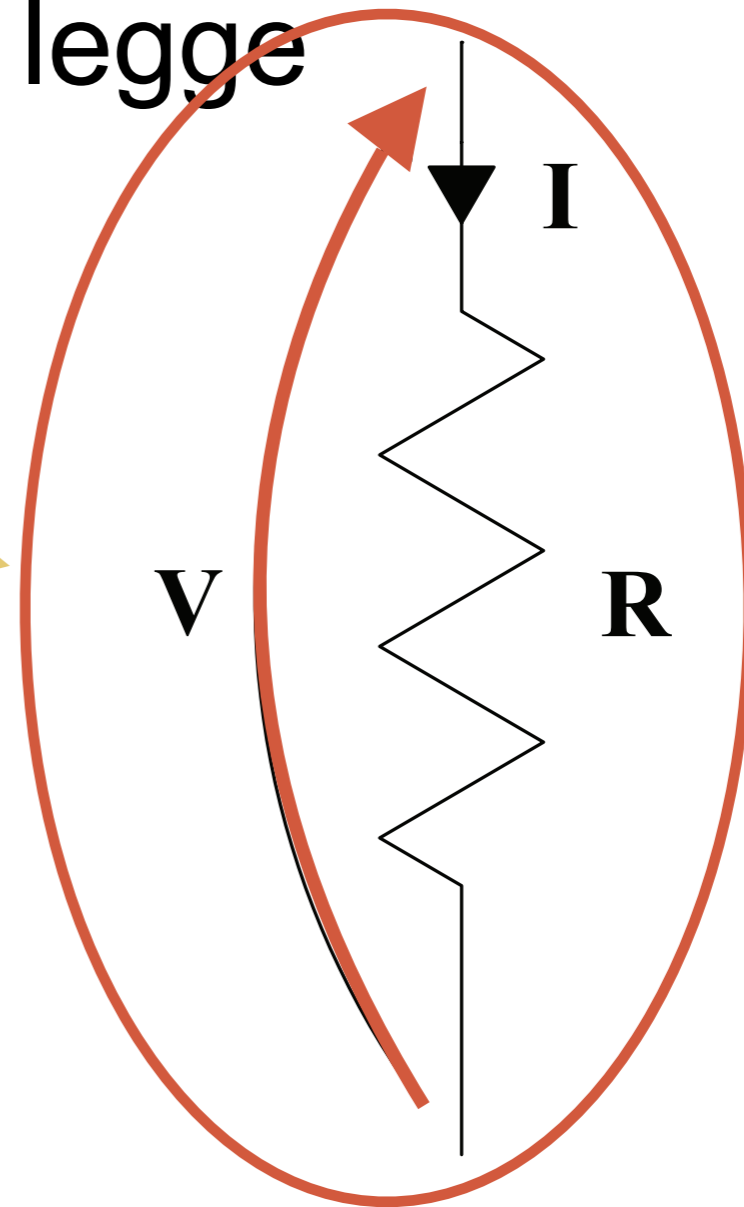
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO RESISTIVO

Resistore

- **Def.** Un resistore è un bipolo ideale (privo di capacità ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = R \cdot I$$

$$[R] = \frac{[\textit{voltage}]}{[\textit{ampere}]} = [\textit{ohm}]$$



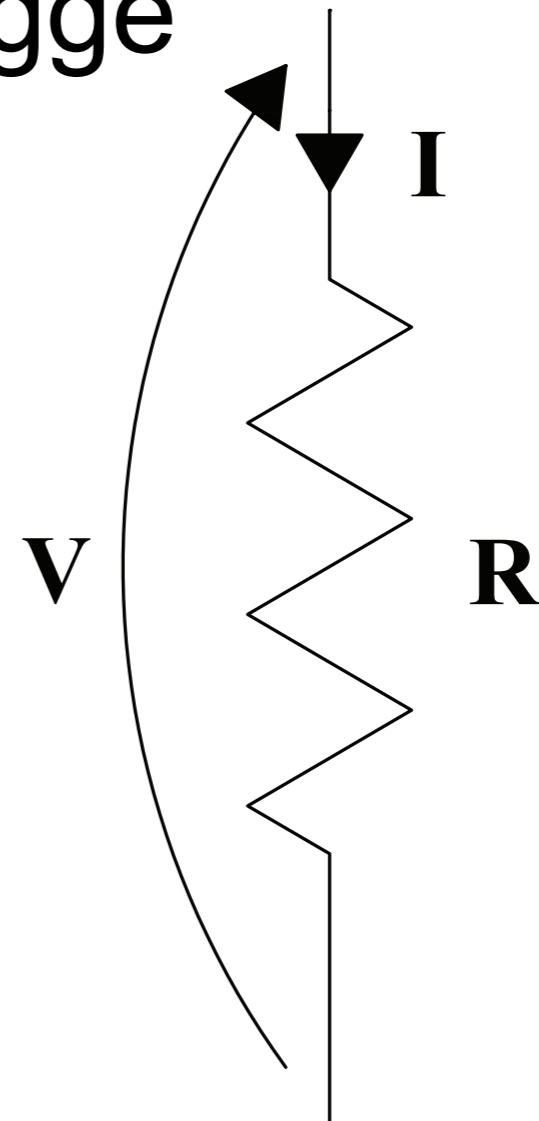
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO RESISTIVO

Resistore

- **Def.** Un resistore è un bipolo ideale (privo di capacità ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$\underline{V = R \cdot I}$$

$$[R] = \frac{[volt]}{[ampere]} = [ohm]$$



ELEMENTO CAPACITIVO

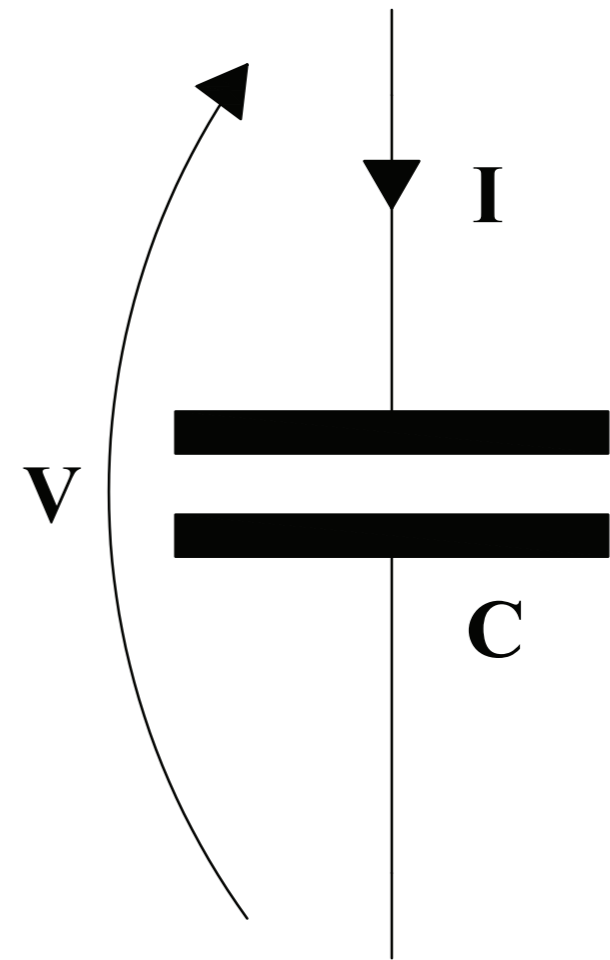
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO CAPACITIVO

Capacitore

- **Def.** Un condensatore è un bipolo ideale (privo di resistenza ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = C\dot{V}$$

$$[C] = \frac{[ampere]}{[volt / s]} = [Farad]$$



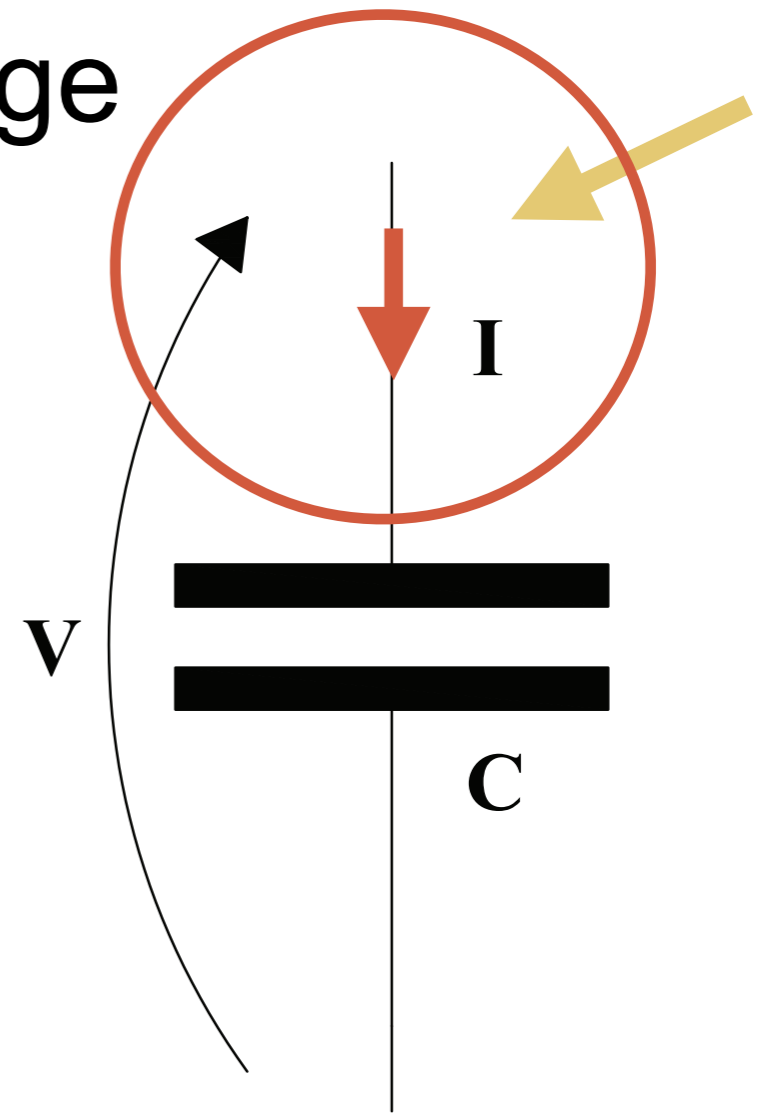
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO CAPACITIVO

Capacitore

- **Def.** Un condensatore è un bipolo ideale (privo di resistenza ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = C\dot{V}$$

$$[C] = \frac{[ampere]}{[volt / s]} = [Farad]$$



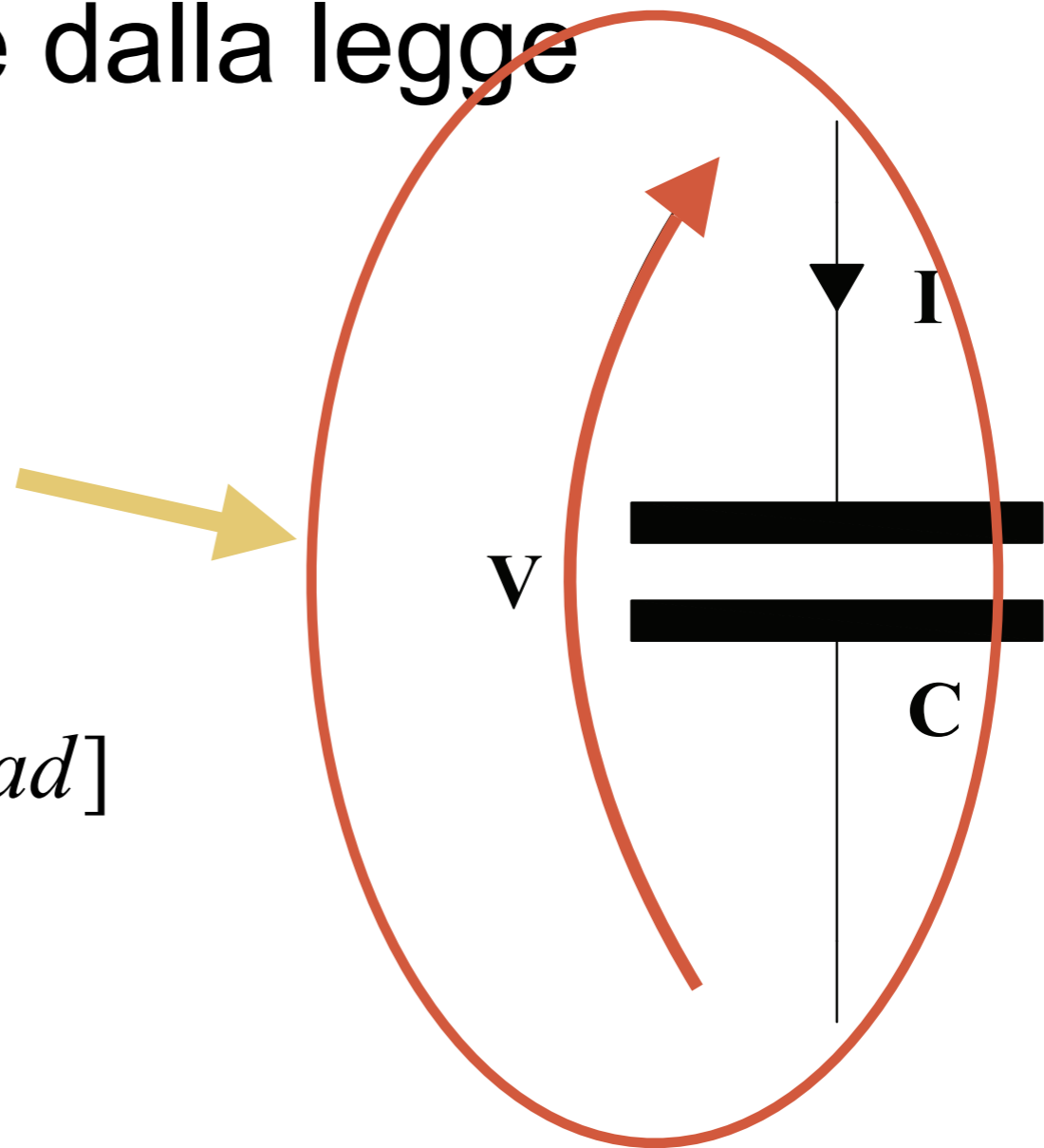
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO CAPACITIVO

Capacitore

- **Def.** Un capacitore è un bipolo ideale (privo di resistenza ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = C\dot{V}$$

$$[C] = \frac{[ampere]}{[volt / s]} = [Farad]$$



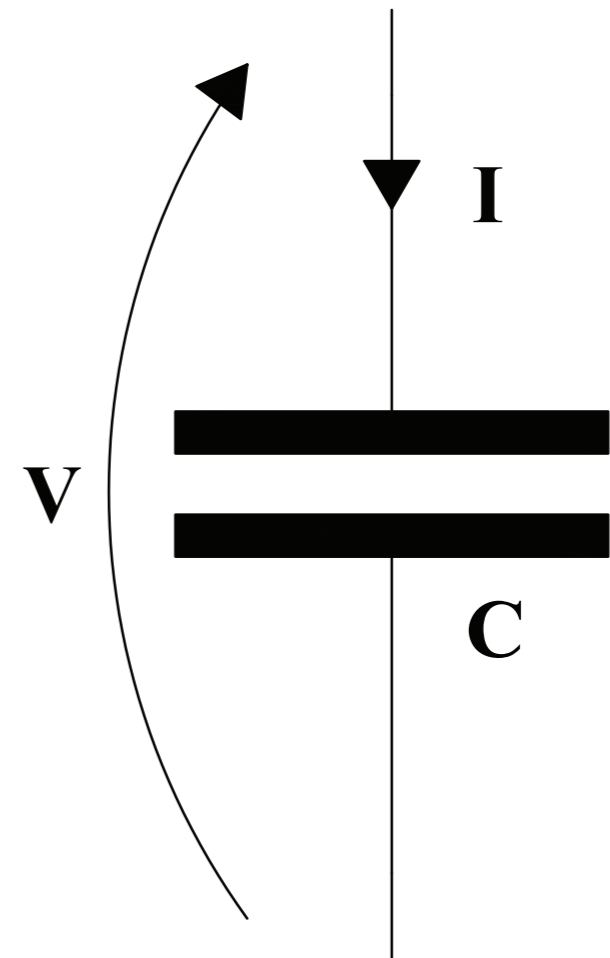
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO CAPACITIVO

Capacitore

- **Def.** Un condensatore è un bipolo ideale (privo di resistenza ed induttanza) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$I = C \cdot \frac{dV}{dt} = C\dot{V}$$

$$[C] = \frac{[\textit{ampere}]}{[\textit{volt} / \textit{s}]} = [\textit{Farad}]$$



**ELEMENTO
INDUTTIVO**

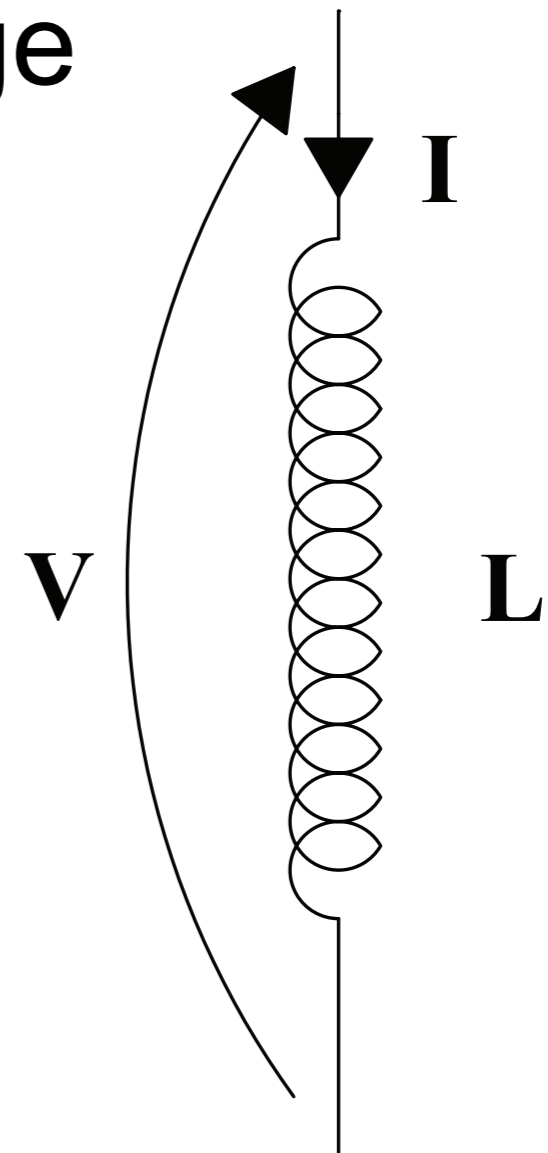
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO INDUTTIVO

Induttore

- **Def.** Un induttore è un bipolo ideale (privo di resistenza e capacità) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = L \cdot \frac{dI}{dt} = L\dot{I}$$

$$[L] = \frac{[volt]}{[ampere / s]} = [henry]$$



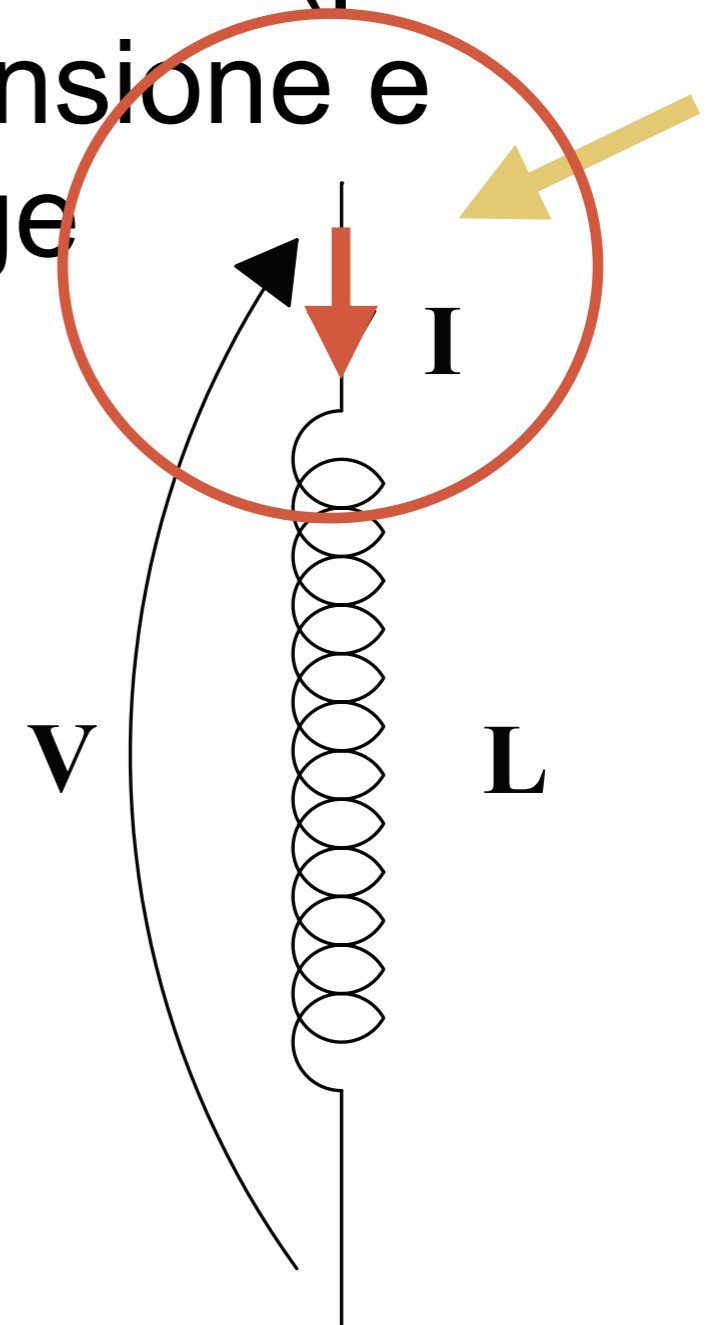
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO INDUTTIVO

Induttore

- **Def.** Un induttore è un bipolo ideale (privo di resistenza e capacità) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = L \cdot \frac{dI}{dt} = L\dot{I}$$

$$[L] = \frac{[volt]}{[ampere / s]} = [henry]$$



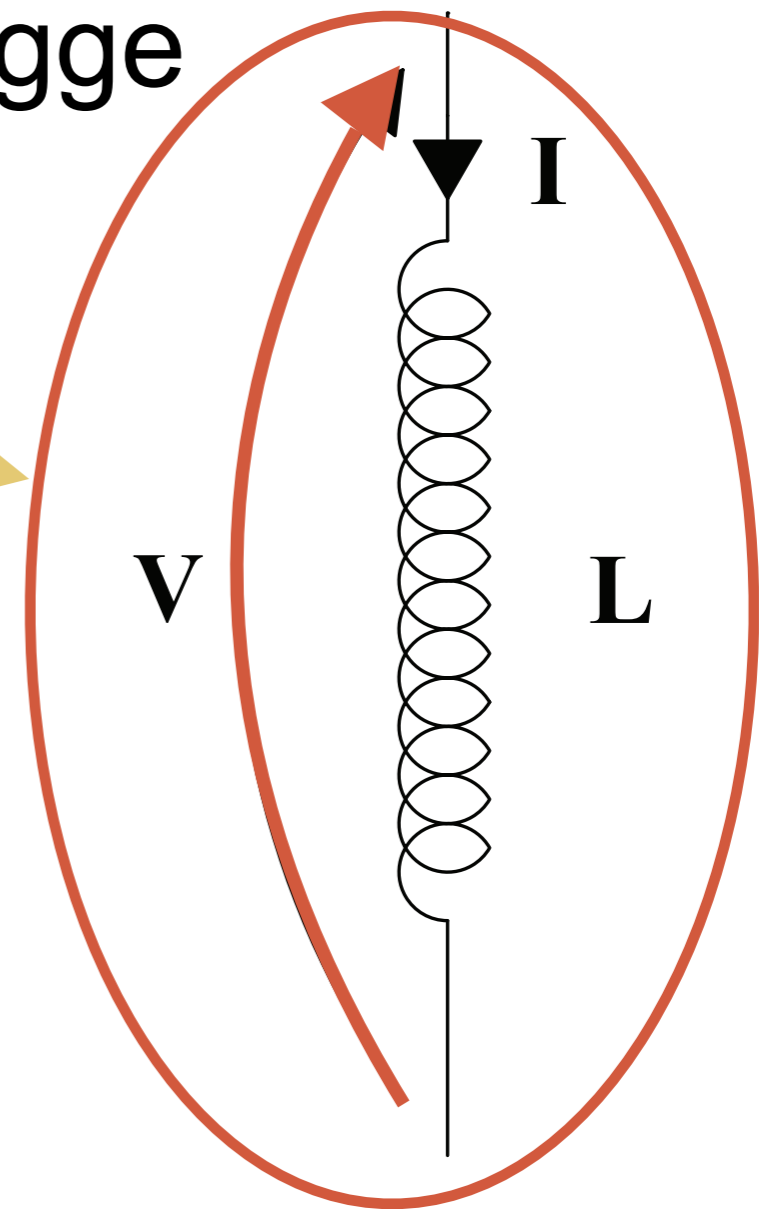
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO INDUTTIVO

Induttore

- **Def.** Un induttore è un bipolo ideale (privo di resistenza e capacità) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = L \cdot \frac{dI}{dt} = LI$$

$$[L] = \frac{[volt]}{[ampere / s]} = [henry]$$



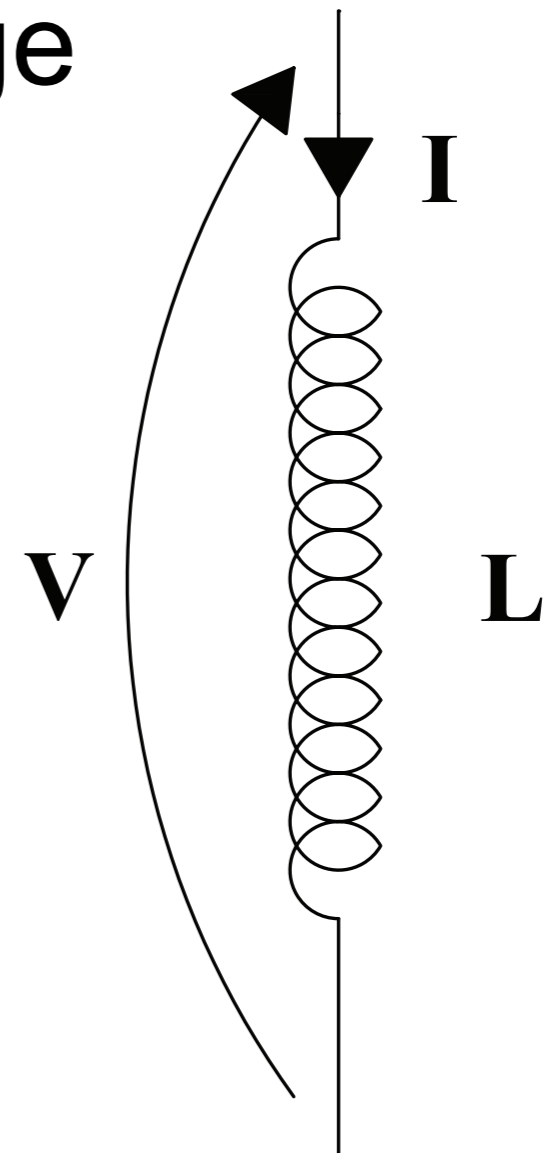
MODELLISTICA ELETRICA: ELEMENTO INDUTTIVO

Induttore

- **Def.** Un induttore è un bipolo ideale (privo di resistenza e capacità) in cui tensione e corrente sono legate dalla legge

$$V = L \cdot \frac{dI}{dt} = LI$$

$$[L] = \frac{[volt]}{[ampere / s]} = [henry]$$



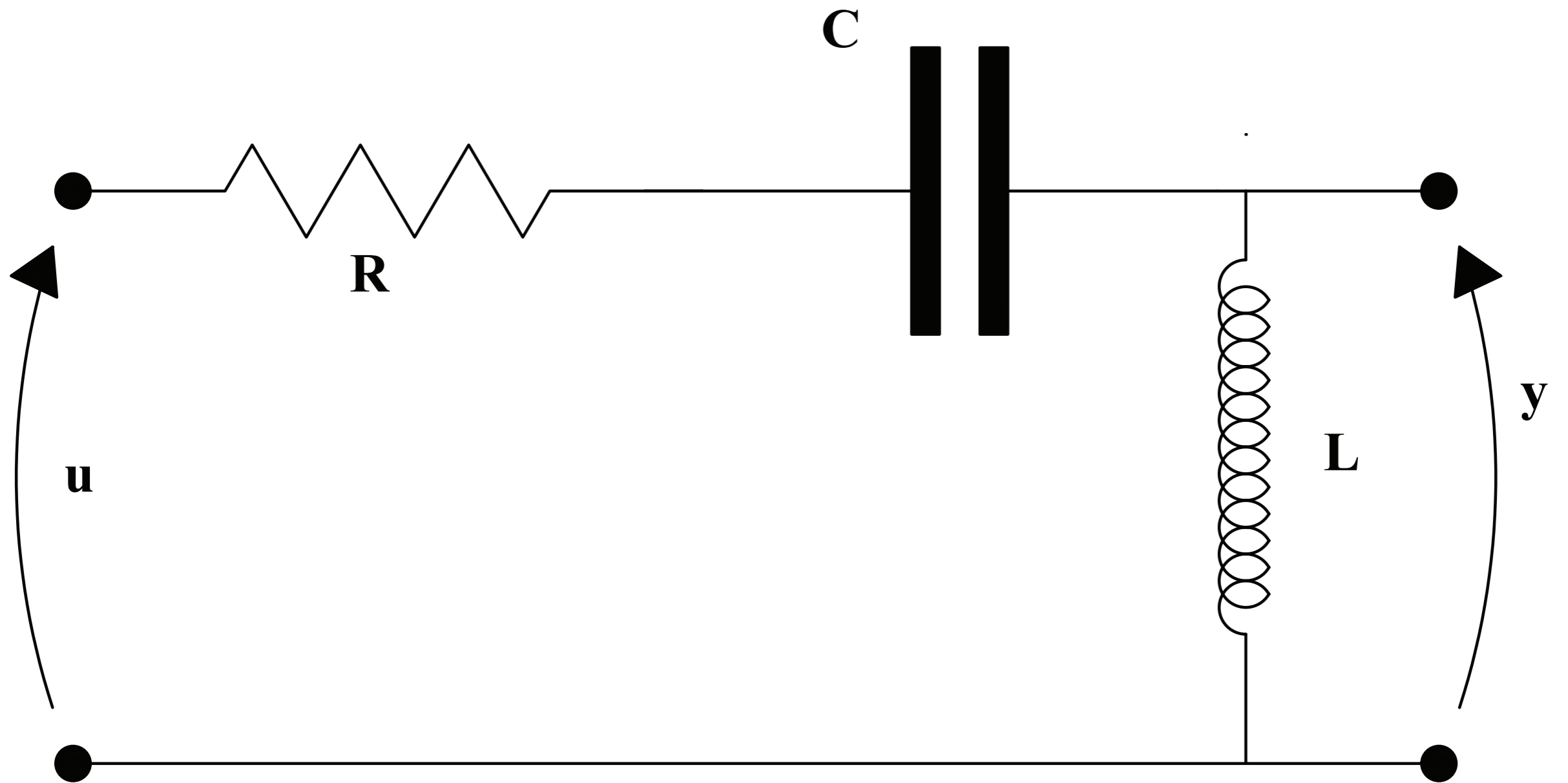
DEFINIZIONI DELLE VARIABILI DI STATO

- Il vettore delle variabili di stato può essere definito come il vettore composto dalle *cadute di potenziale ai capi dei condensatori* e dalle *correnti che fluiscono negli induttori*

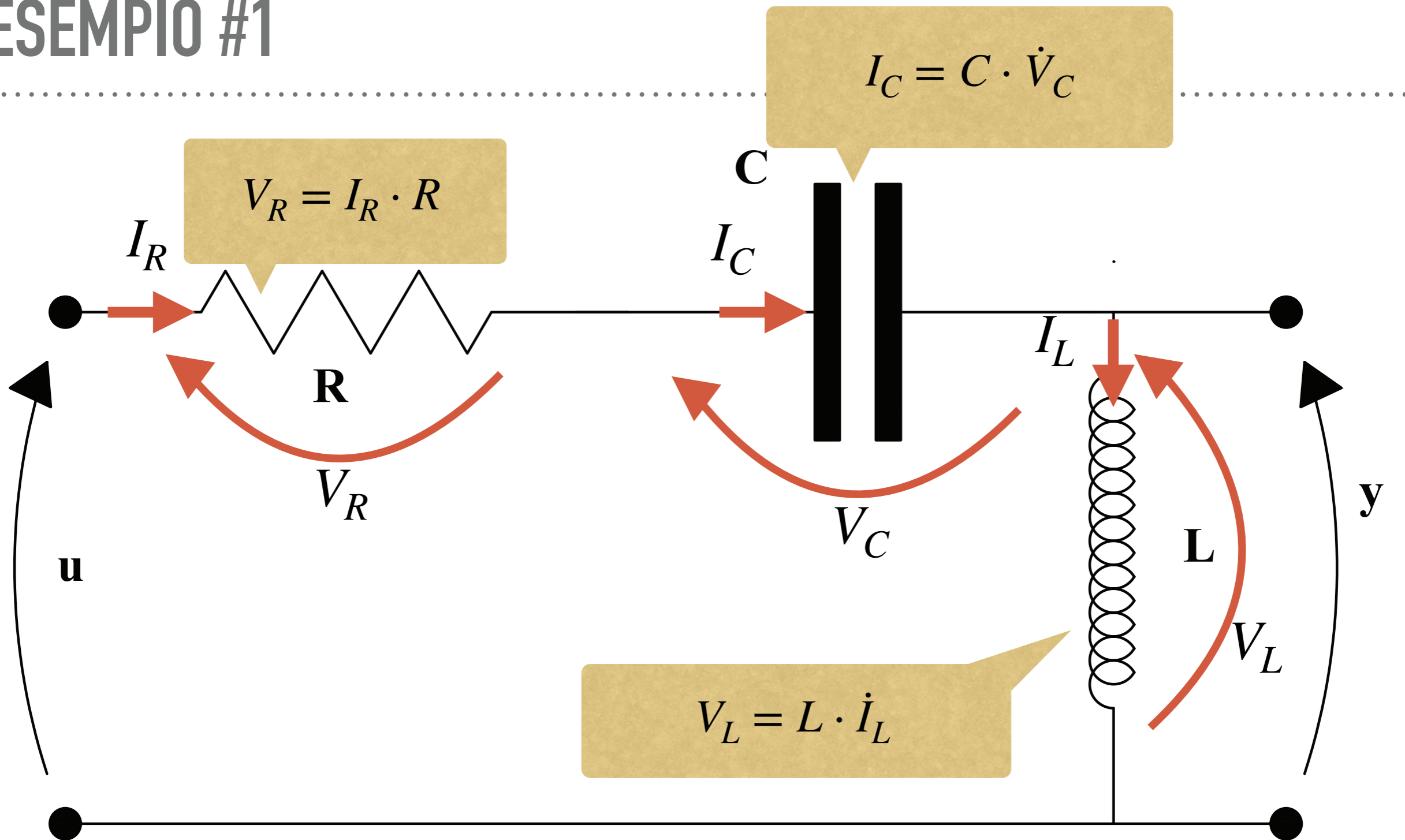
ESEMPI

- **N.B.** Per ragioni di chiarezza negli esempi che seguiranno la dipendenza esplicita dal tempo dei vettori di ingresso, stato e uscita sarà omessa

ESEMPIO #1

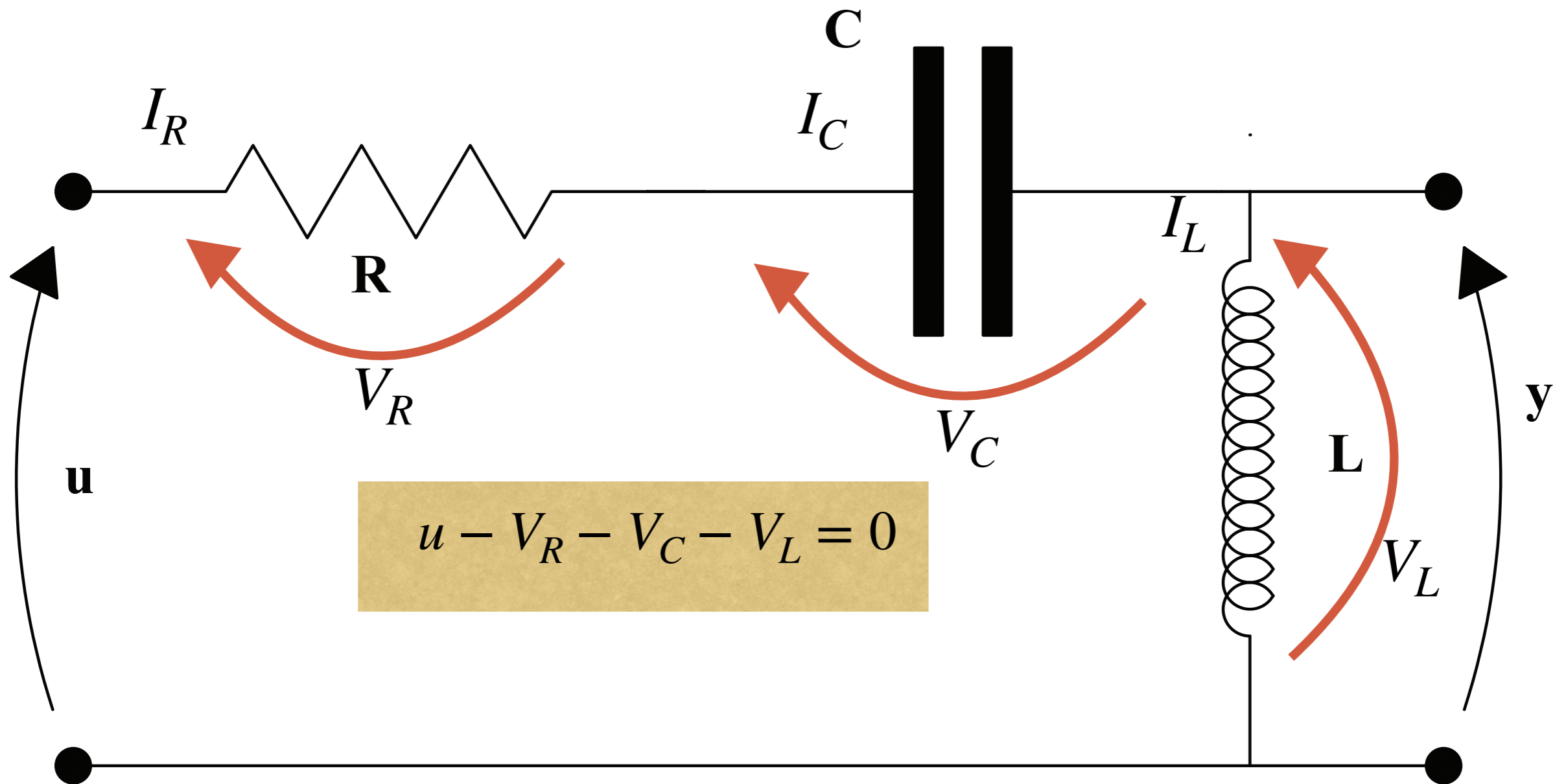


ESEMPIO #1



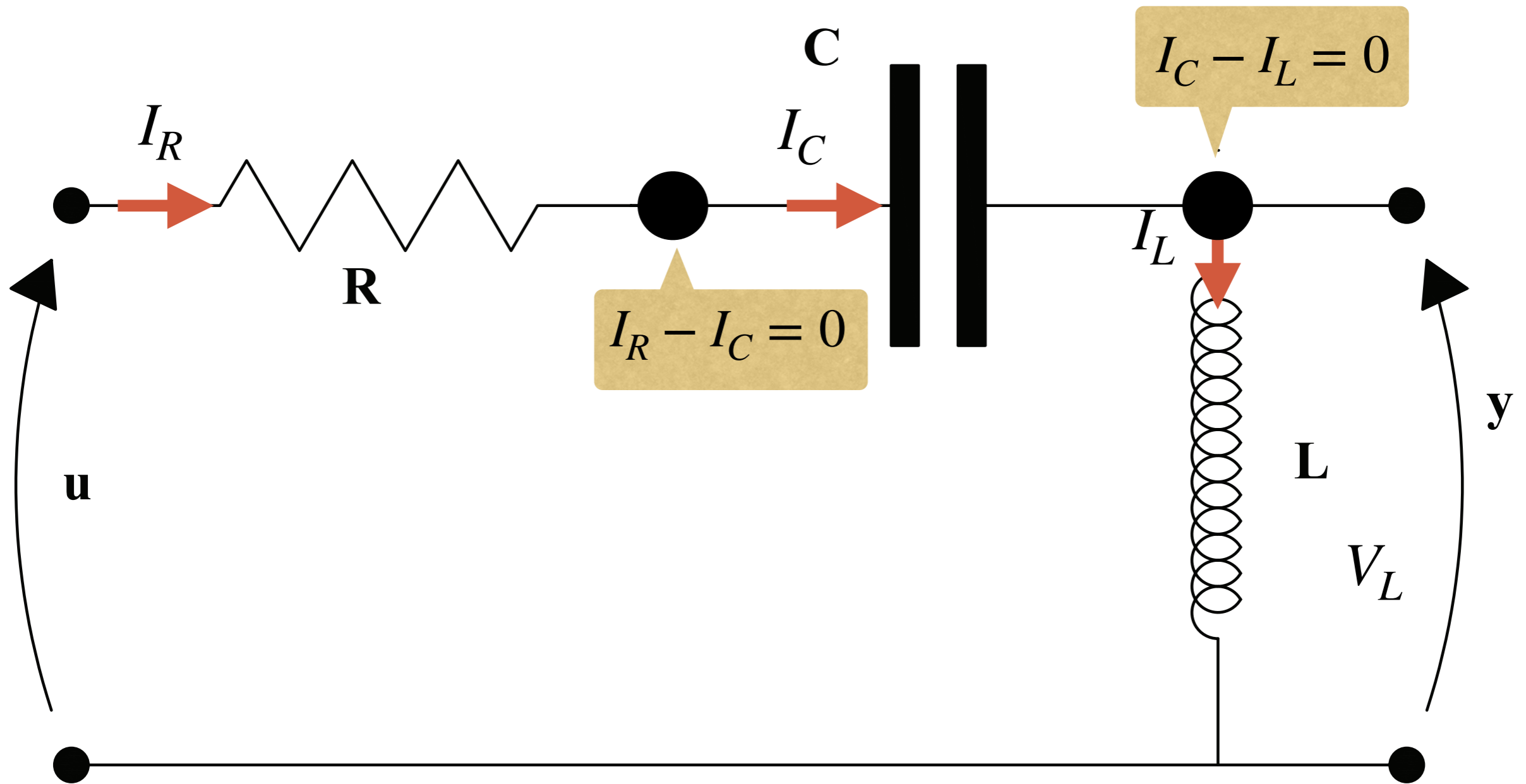
Relazioni Caratteristiche

ESEMPIO #1



Kirchhoff alle maglie

ESEMPIO #1



Kirchhoff ai nodi

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$u - V_R - V_C - V_L = 0$$

$$I_C = I_L$$

$$I_R = I_C$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{I}_L = \frac{u}{L} - \frac{I_L R}{L} - \frac{V_C}{L}$$

$$\dot{V}_C = \frac{I_L}{C}$$

$$y = u - R \cdot I_L - V_C$$

$$u - I_L \cdot R - V_C - L \cdot \dot{I}_L = 0$$

$$y = V_L$$

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$u - V_R - V_C - V_L = 0$$

$$I_C = I_L$$

$$I_R = I_C$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{I}_L = \frac{u}{L} - \frac{I_L R}{L} - \frac{V_C}{L}$$

$$\dot{V}_C = \frac{I_L}{C}$$

$$y = u - R \cdot I_L - V_C$$

$$u - I_L \cdot R - V_C - L \cdot \dot{I}_L = 0$$

$$y = V_L$$

2

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$u - V_R - V_C - V_L = 0$$

$$I_C = I_L$$

$$I_R = I_C$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{I}_L = \frac{u}{L} - \frac{I_L R}{L} - \frac{V_C}{L}$$

$$\dot{V}_C = \frac{I_L}{C}$$

$$y = u - R \cdot I_L - V_C$$

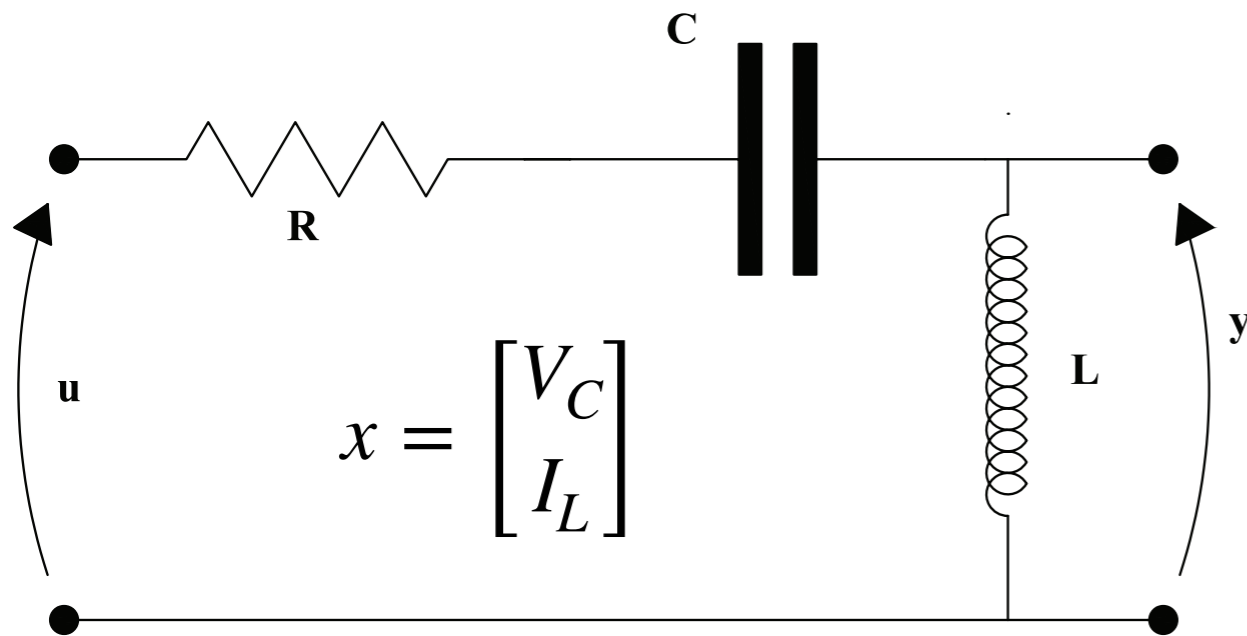
3

$$u - I_L \cdot R - V_C - L \cdot \dot{I}_L = 0$$

$$y = V_L$$

2

ESEMPIO #1: RAPPRESENTAZIONE ISU



Numero Var. stato $n = 2$

Numero Var. uscita $p = 1$

Numero Var. ingresso $m = 1$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

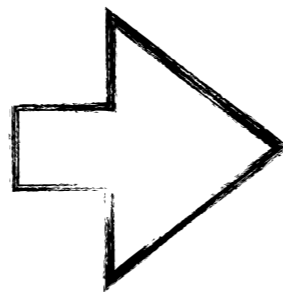
$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$\dot{V}_C = \frac{I_L}{C}$$

$$\dot{I}_L = \frac{u}{L} - \frac{I_L R}{L} - \frac{V_C}{L}$$

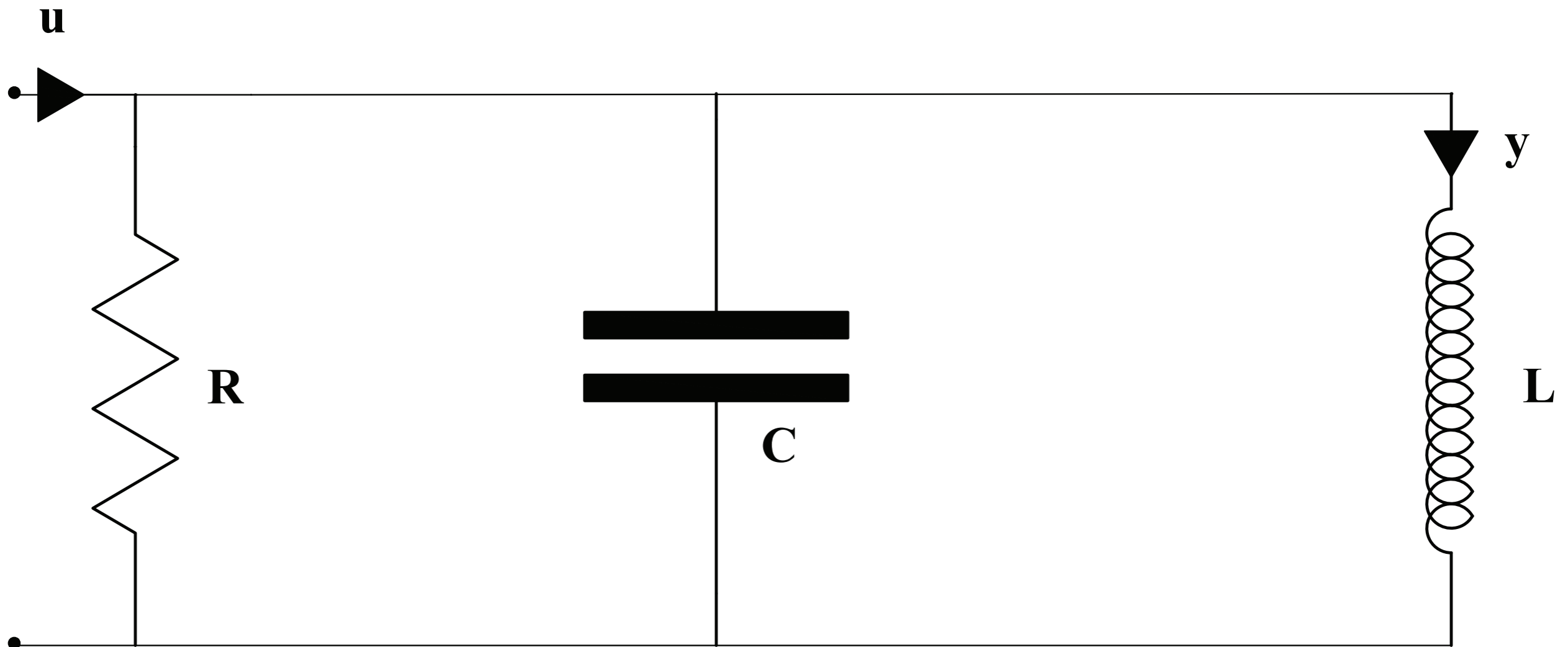
$$y = u - R \cdot I_L - V_C$$



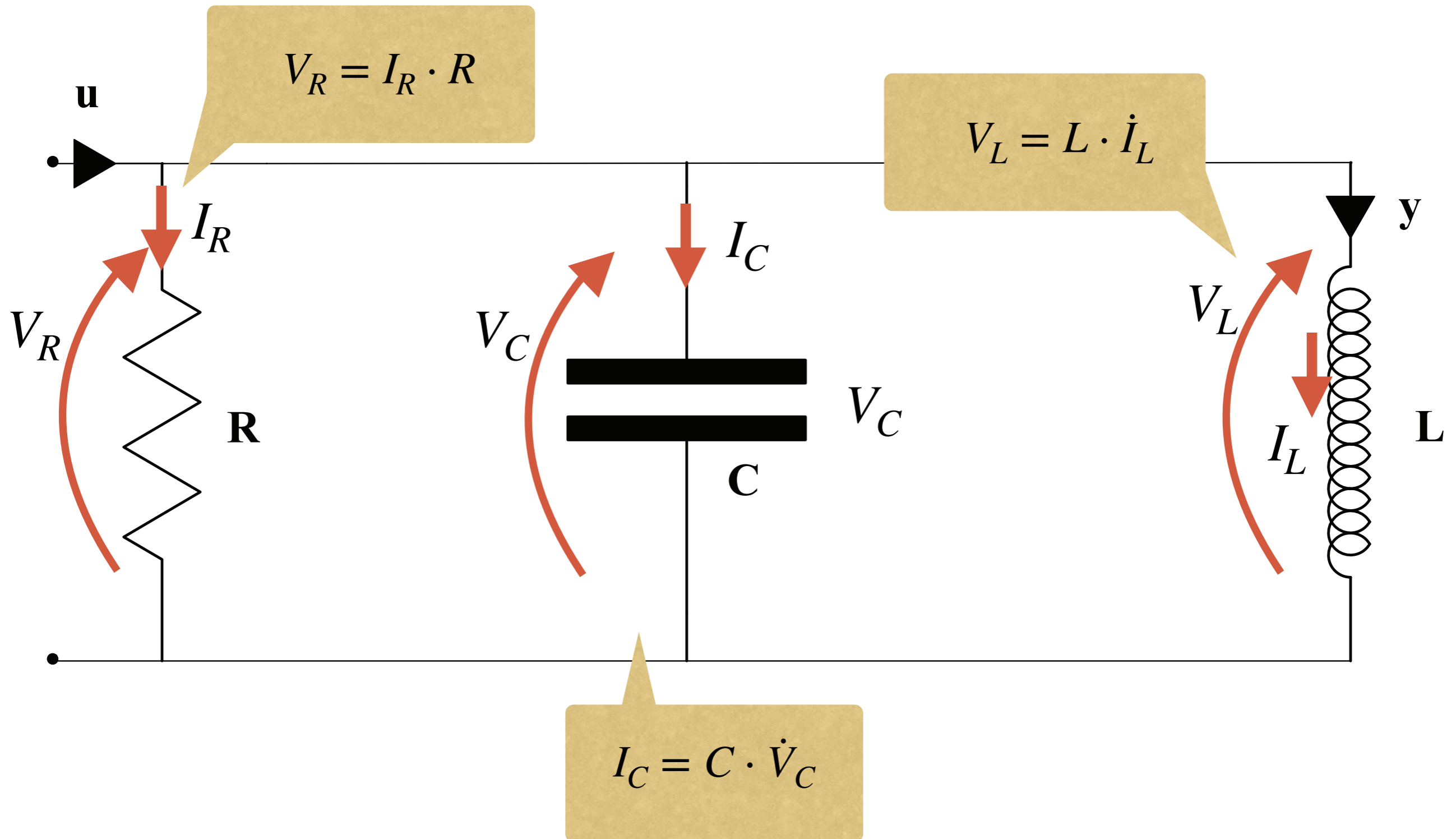
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

$$y = [-1 \quad -R] \cdot x + [1] u$$

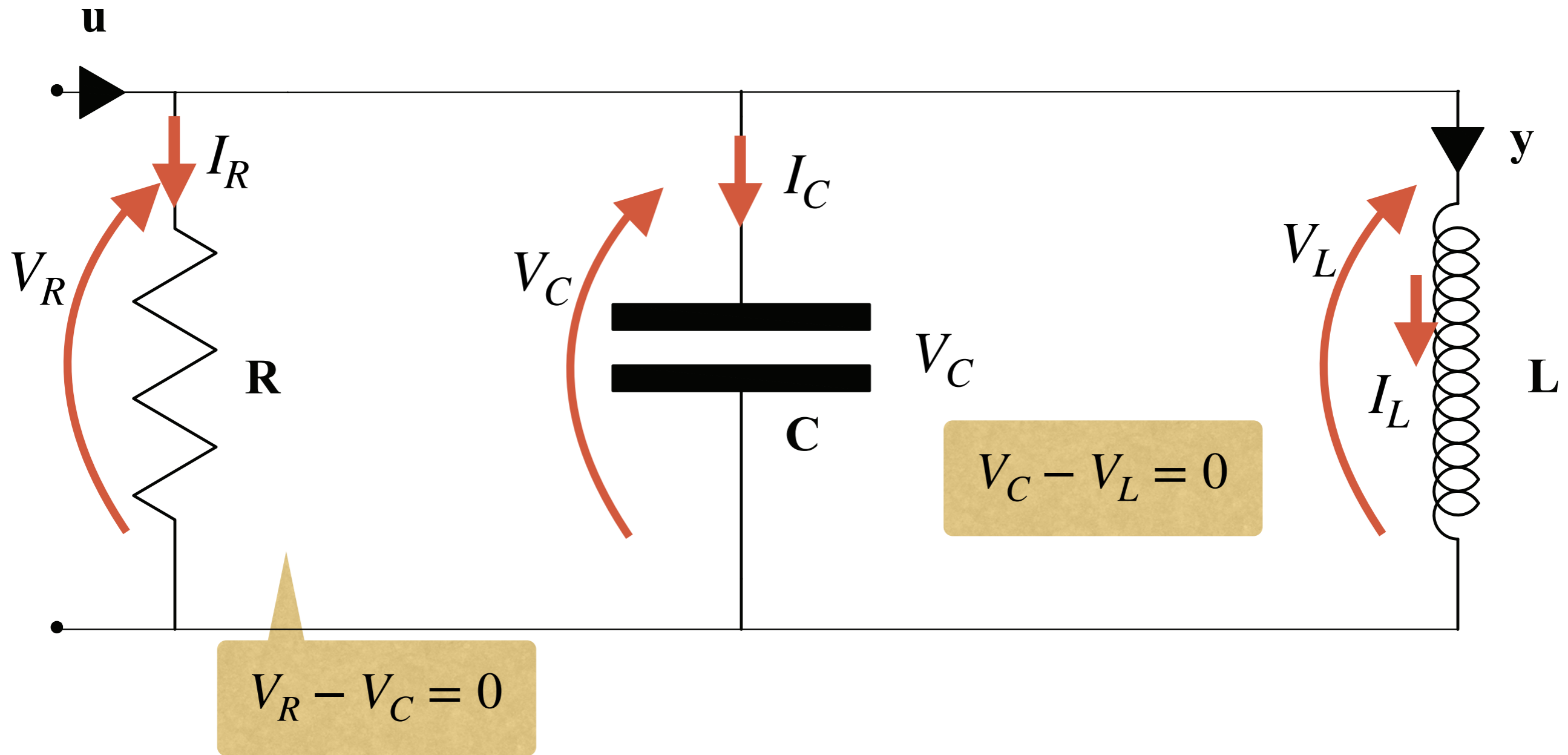
ESEMPIO #2



ESEMPIO #2

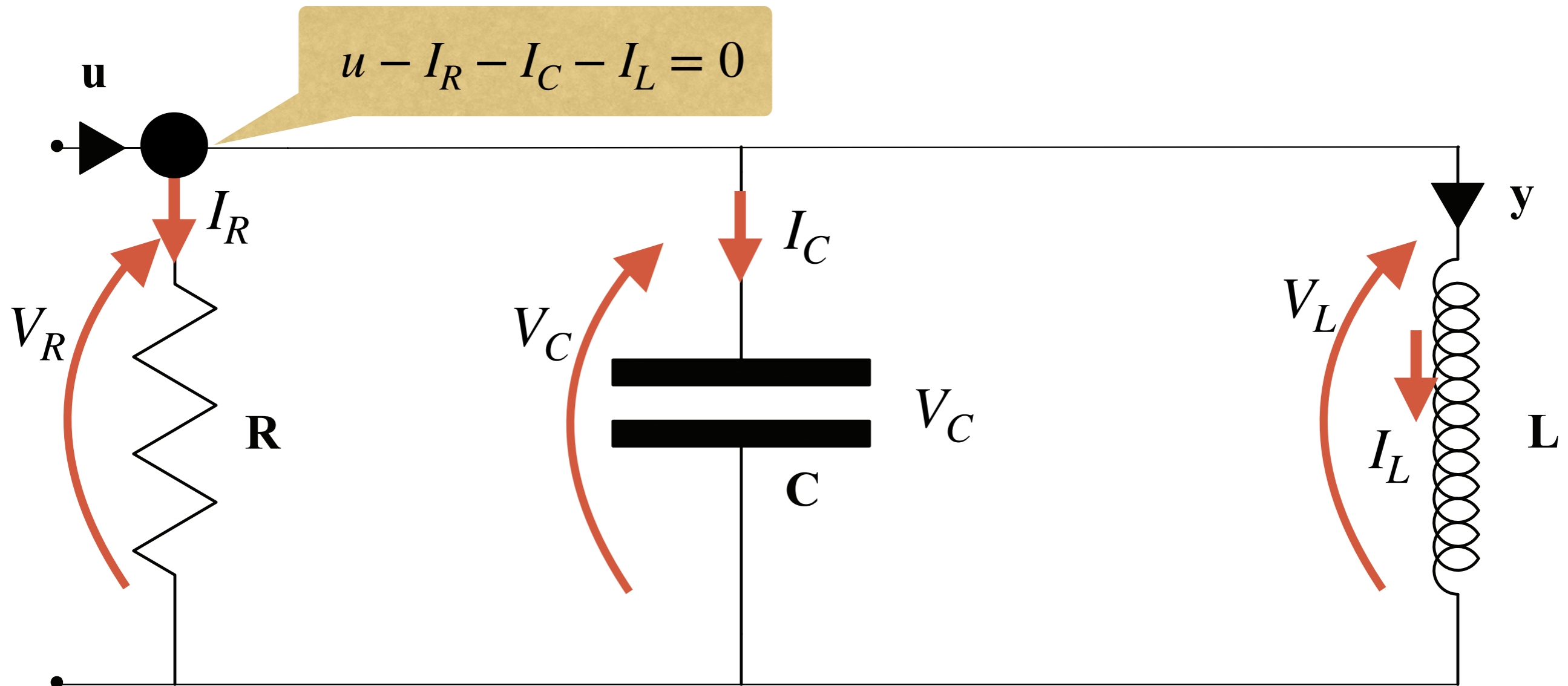


ESEMPIO #2



Kirchhoff alle maglie

ESEMPIO #2



Kirchhoff ai nodi

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$V_C = V_L = V_R$$
$$u - I_R - I_C - I_L = 0$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{V}_C = \frac{u}{C} - \frac{V_C}{CR} - \frac{I_L}{C}$$

$$\dot{I}_L = \frac{V_C}{L}$$

$$y = I_L$$

$$u - \frac{V_C}{R} - C\dot{V}_C - I_L = 0$$

$$L\dot{I}_L = V_C$$

$$y = I_L$$

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$V_C = V_L = V_R$$
$$u - I_R - I_C - I_L = 0$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{V}_C = \frac{u}{C} - \frac{V_C}{CR} - \frac{I_L}{C}$$

$$\dot{I}_L = \frac{V_C}{L}$$

$$y = I_L$$

$$u - \frac{V_C}{R} - C\dot{V}_C - I_L = 0$$

$$L\dot{I}_L = V_C$$

$$y = I_L$$

2

$$V_R = I_R \cdot R$$

$$V_L = L \cdot \dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$V_C = V_L = V_R$$
$$u - I_R - I_C - I_L = 0$$

Equazioni Costitutive

1

$$\dot{V}_C = \frac{u}{C} - \frac{V_C}{CR} - \frac{I_L}{C}$$

$$\dot{I}_L = \frac{V_C}{L}$$

$$y = I_L$$

3

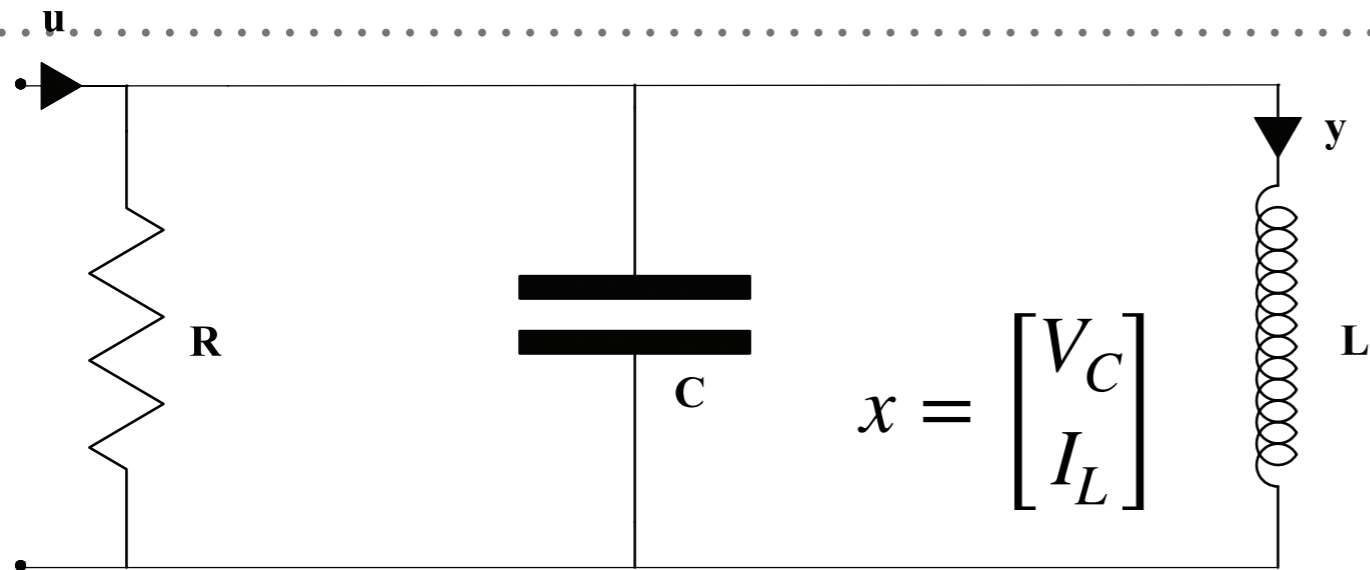
$$u - \frac{V_C}{R} - C\dot{V}_C - I_L = 0$$

$$L\dot{I}_L = V_C$$

$$y = I_L$$

2

ESEMPIO #1: RAPPRESENTAZIONE ISU



Numero Var. stato $n = 2$

Numero Var. uscita $p = 1$

Numero Var. ingresso $m = 1$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

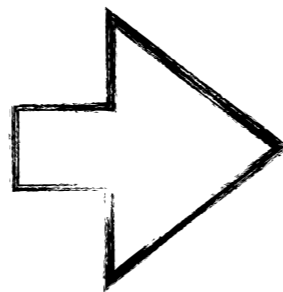
$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$\dot{V}_C = \frac{u}{C} - \frac{V_C}{CR} - \frac{I_L}{C}$$

$$\dot{I}_L = \frac{V_C}{L}$$

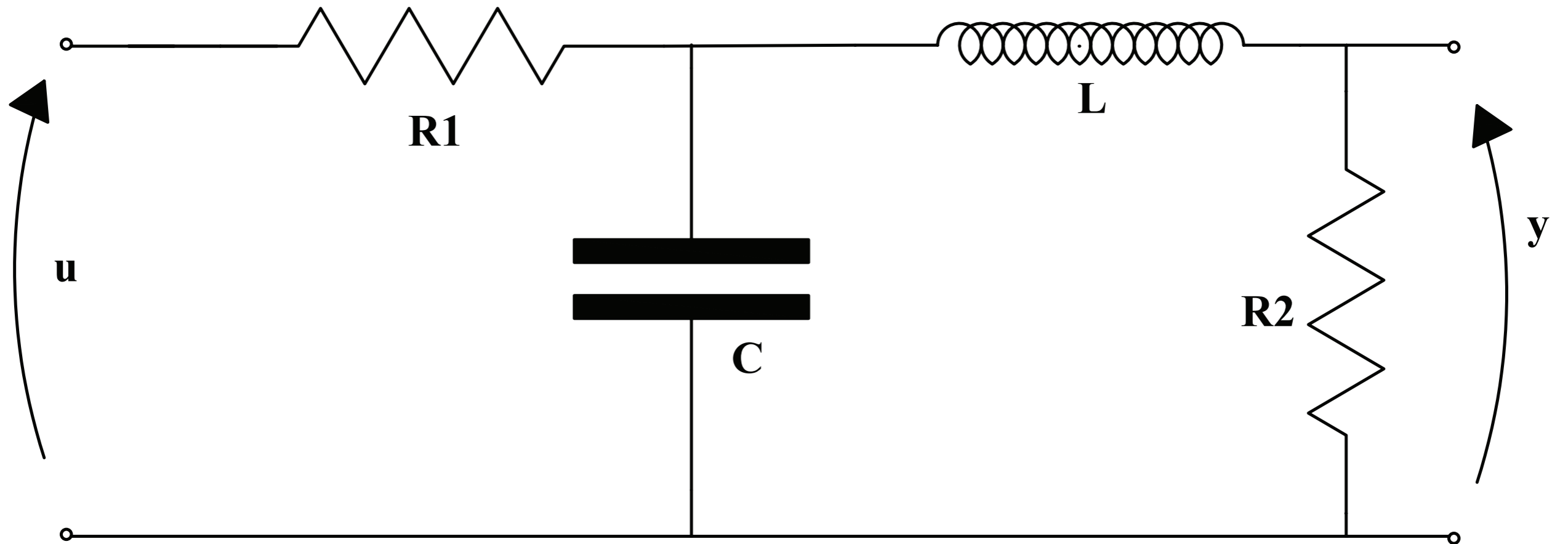
$$y = I_L$$



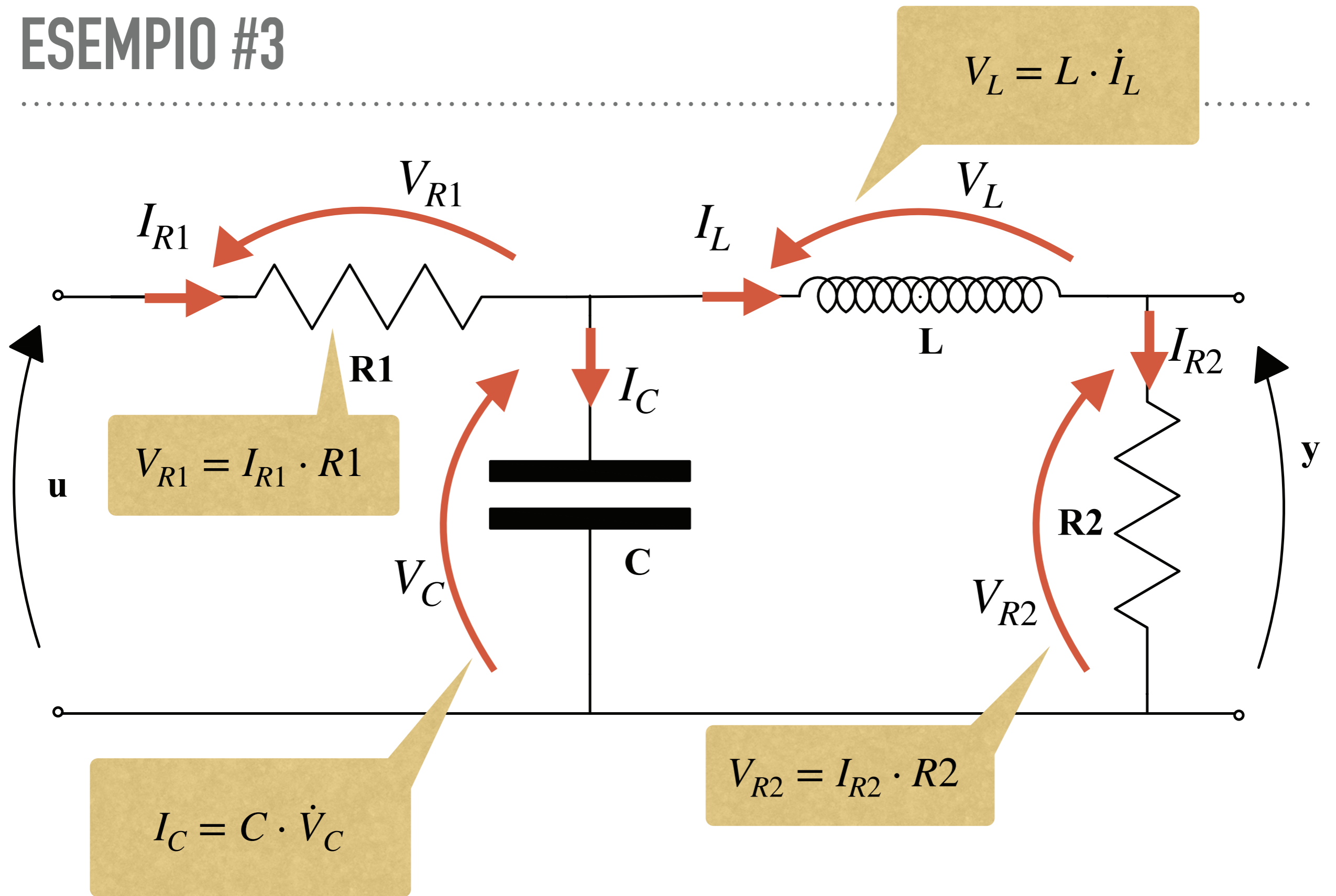
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] \cdot x + [0] u$$

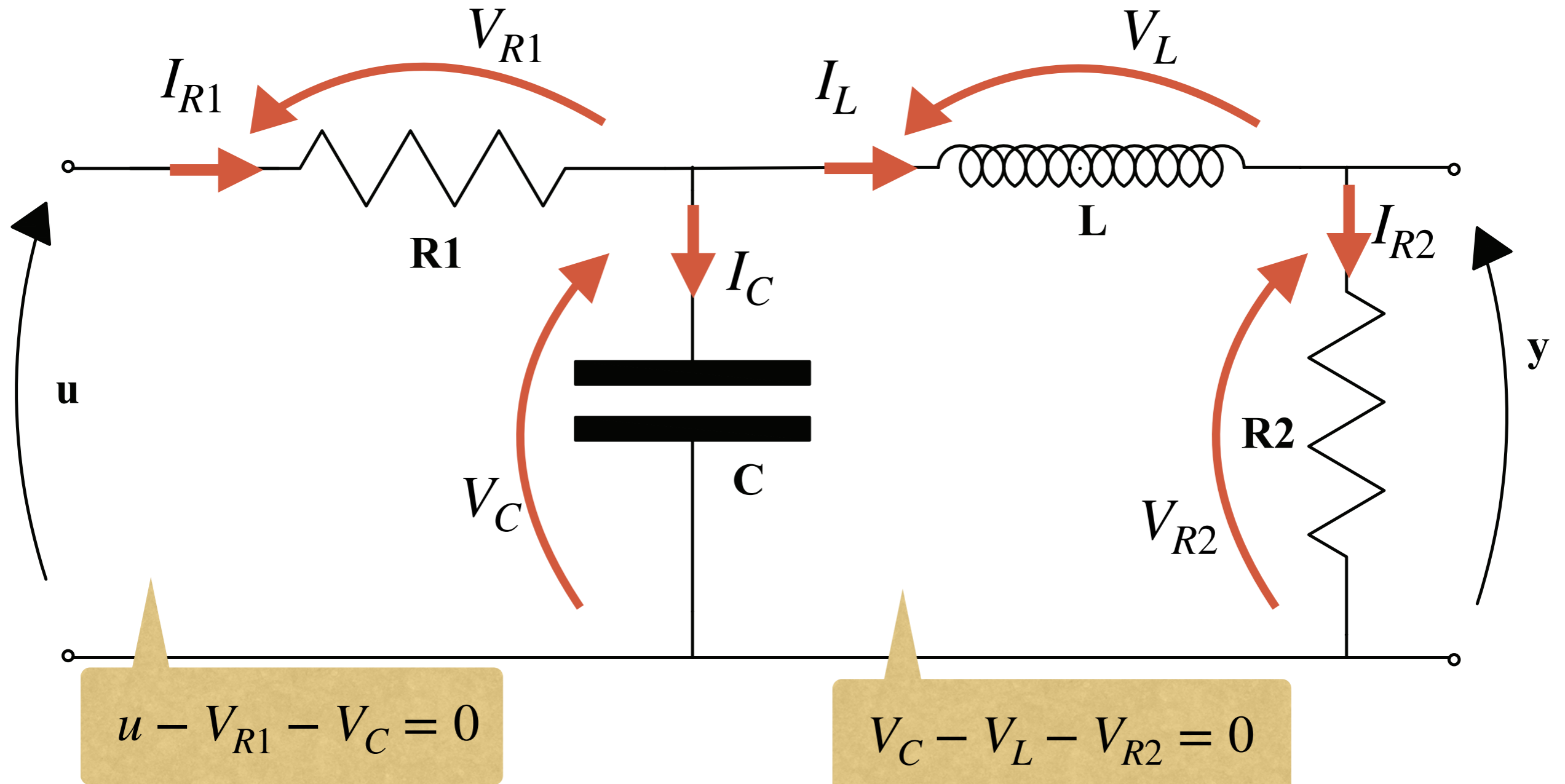
ESEMPIO #3



ESEMPIO #3

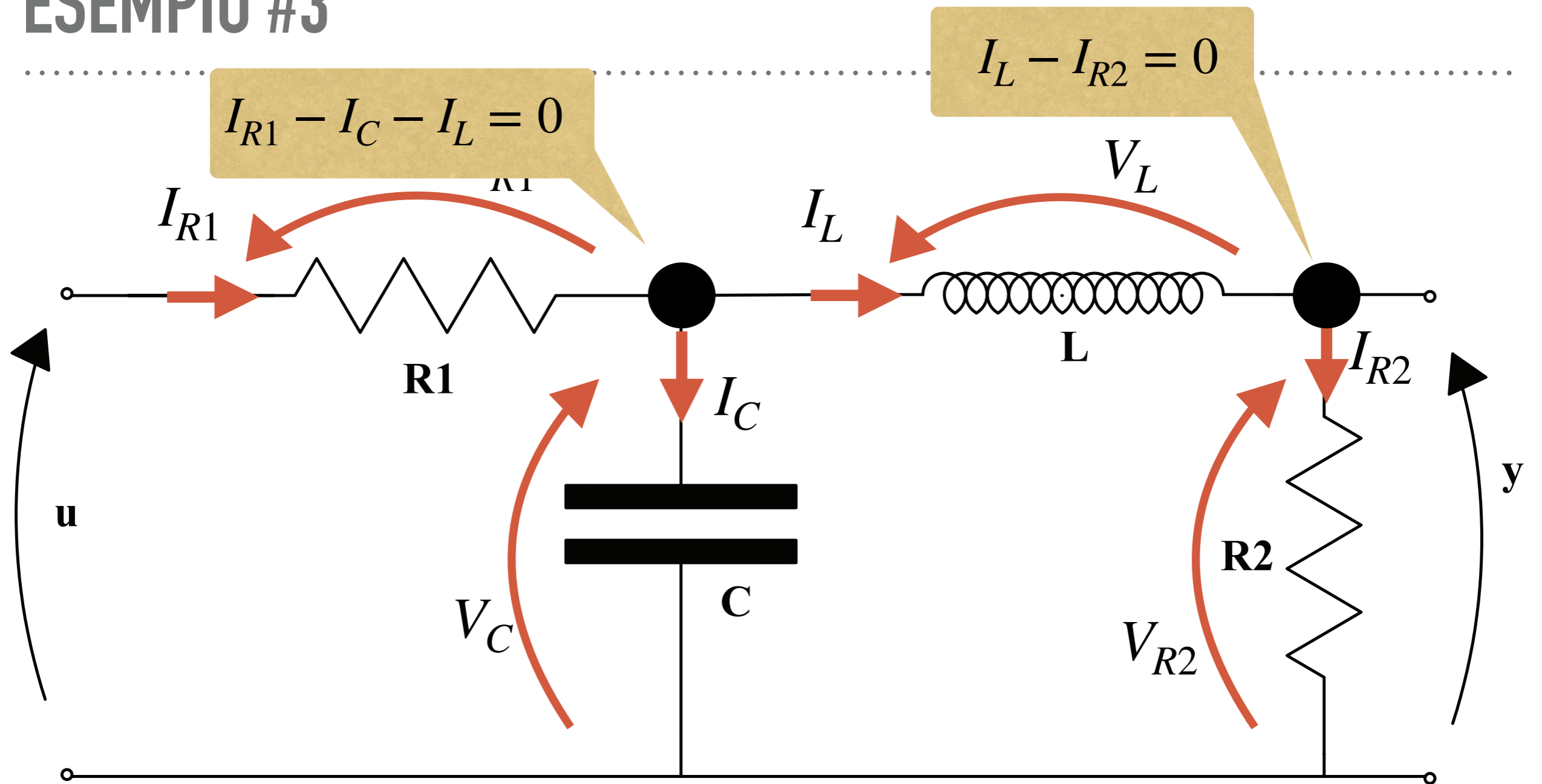


ESEMPIO #3



Kirchhoff alle maglie

ESEMPIO #3



Kirchhoff ai nodi

$$V_{R1} = I_{R1} \cdot R1$$

$$V_{R2} = I_{R2} \cdot R2$$

$$V_L = L\dot{I}_L$$

$$I_C = C \cdot \dot{V}_C$$

Relazioni Caratteristiche

$$I_{R2} = I_L$$

$$I_{R1} = I_C + I_L$$

$$V_C = V_L + V_{R2}$$

$$u - V_{R1} - V_C = 0$$

Equazioni Costitutive

1

$$u - (C \cdot \dot{V}_C + I_L) \cdot R1 - V_C = 0$$

$$L \cdot \dot{I}_L = V_C - I_L \cdot R2$$

$$y = I_L \cdot R2$$

2

$$\dot{V}_C = -\frac{1}{C \cdot R1} \cdot V_C - \frac{1}{C} \cdot I_L + \frac{1}{C \cdot R1} u$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{L} \cdot V_C - \frac{R2}{L} \cdot I_L$$

$$y = I_L \cdot R2$$

3

$$u - (C \cdot \dot{V}_C + I_L) \cdot R1 - V_C = 0$$

$$L \cdot \dot{I}_L = V_C - I_L \cdot R2$$

$$y = I_L \cdot R2$$

2

Numero Var. stato $n = 2$

Numero Var. uscita $p = 1$

Numero Var. ingresso $m = 1$

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

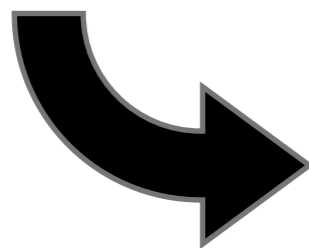
$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}, D \in \mathbb{R}^{p \times m}$$

$$\dot{V}_C = -\frac{1}{C \cdot R1} \cdot V_C - \frac{1}{C} \cdot I_L + \frac{1}{C \cdot R1} u$$

$$\dot{I}_L = \frac{1}{L} \cdot V_C - \frac{R2}{L} \cdot I_L$$

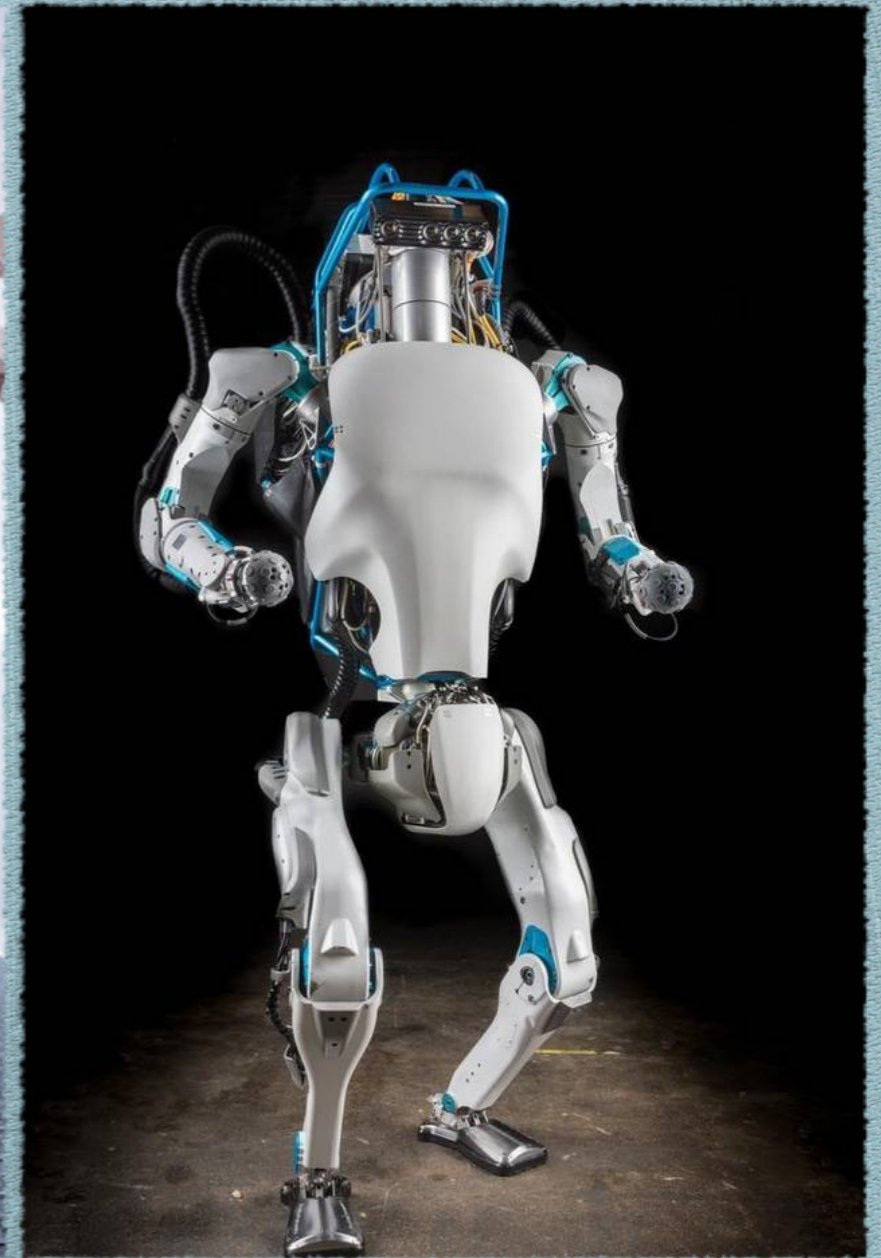
$$y = I_L \cdot R2$$

$$x = \begin{bmatrix} V_C \\ I_L \end{bmatrix}$$



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C \cdot R1} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R2}{L} \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C \cdot R1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad R2] \cdot x + [0] u$$



Automatica

A.A. 2023/2024