Automatica

A.A. 2023/2024

1. ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI
2. PASSAGGIO IU–ISU

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (s \cdot I - A)^{-1} B U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s) x(0) + H(s) U(s) \qquad (2)$$

$$Y(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (C(s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s) x(0) + W(s) U(s) \qquad (3)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il tema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \; \cdots \\ y(t) = C \; \cdots \end{cases} \quad \cdots 0) = x_0 \qquad (1)$$

Evoluzione libera nello stato

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = \boxed{(s \cdot I - A)^{-1} x(0)} + (s \cdot I - A)^{-1} B U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s) x(0) \; \cdots \qquad (2)$$

$$Y(s) = \boxed{C(s \cdot I - A)^{-1} x(0)} + \cdots s) = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s) x(0) \; \cdots \qquad (3)$$

Evoluzione libera nell'uscita

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

➤ Si consideri il … ma lineare stazionario

Evoluzione

<u>forzata</u> nello

stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot \ldots & \ldots = x_0 \\ y(t) = C \cdot \ldots \end{cases} \qquad (1)$$

➤ Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} x(0) + \boxed{(s \cdot I - A)^{-1} B U(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s) x(0) + H(s) U(s) \qquad (2)$$

Evoluzione

<u>forzata</u>

nell'uscita

$$Y \ldots + \boxed{(C(s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s) x(0) + W(s) U(s) \qquad (3)$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

.

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D \qquad (4)$$

- E' detta matrice di trasferimento o rappresentazione IU
- Rappresenta nel dominio di Laplace il legame tra l'ingresso u e l'uscita y

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s)$$

- Nel caso di sistemi SISO, è una funzione razionale fratta

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \qquad (5)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Le radici del polinomio al numeratore sono detti ZERI della funzione di trasferimento

- Le radici del polinomio al denominatore sono detti POLI della funzione di trasferimento

RELAZIONE TRA POLI E AUTOVALORI MATRICE A

- Confrontando (4) e (5) si ottiene la (6)

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D = C\frac{adj(s \cdot I - A)}{|s \cdot I - A|}B + D = \cdots$$

.

$$\cdots = \frac{C \cdot adj(s \cdot I - A) \cdot B + D \cdot |s \cdot I - A|}{|s \cdot I - A|}$$

$$|s \cdot I - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n \quad (6)$$

- In assenza di cancellazioni POLO-ZERO, <u>i POLI di W(s) coincidono con le radici del polinomio caratteristico di A .</u>

ESEMPIO #1

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + u \end{cases}$$

$$W(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s-4 & 2 \\ 3 & s-1 \end{bmatrix}}{(s-1)(s-4)-6} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 =$$

$$= \frac{s-1}{(s-1)(s-4)-6} + 1 = \frac{s-1}{s^2 - 5s - 2} + 1$$

ESEMPIO #2

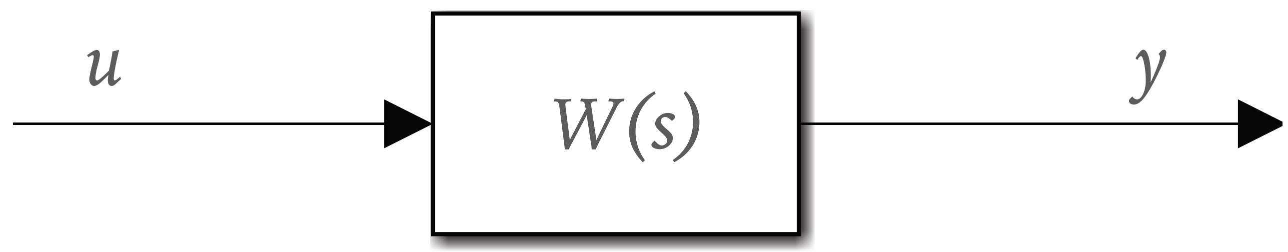
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{\tau} \end{matrix}$$

$$W(s) = C\left(sI - A\right)^{-1} B + D =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{\tau} & +\frac{1}{\tau} \\ \frac{1}{\tau} & s + \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \\ -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau s} \cdot \frac{s + \frac{2}{\tau}}{s + \frac{2}{\tau}} = \frac{1}{\tau s}$$

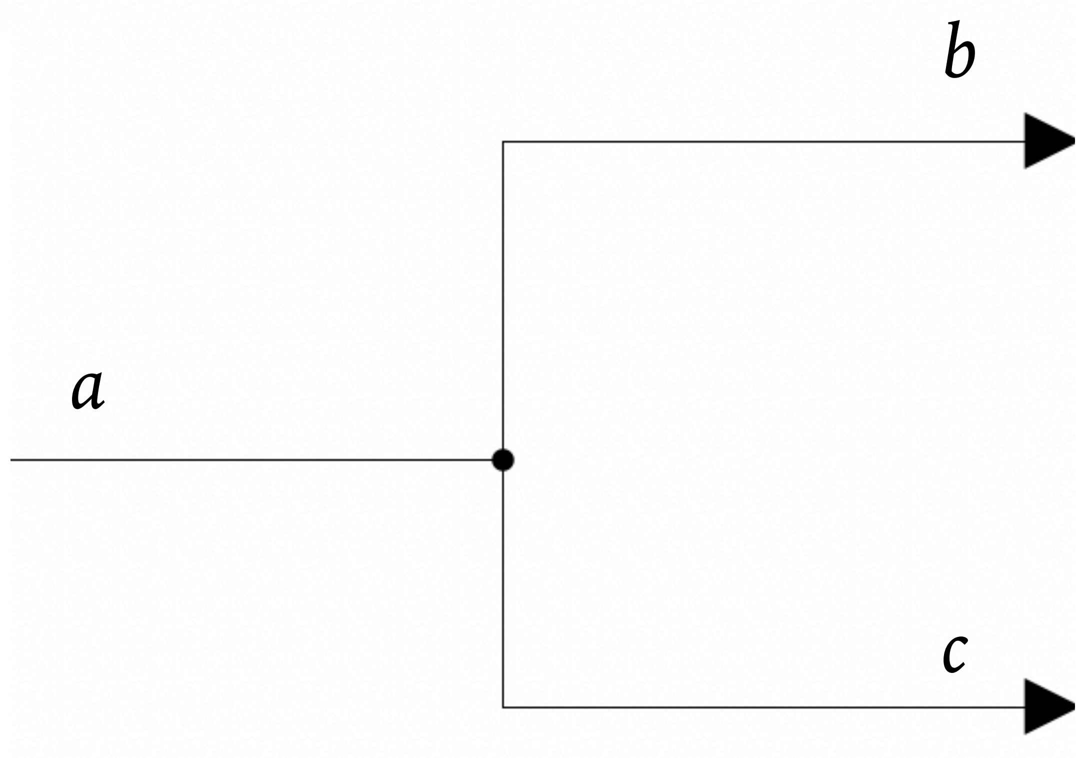
ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

- Nella simbologia degli schemi a blocchi:
  - una variabile è rappresentata da una freccia con il nome della variabile stessa
  - un sistema è rappresentato da un blocco, cioè da un rettangolo al cui interno è indicata la f.d.t, dotato di una freccia entrante (ingresso) e una uscente (uscita)



ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

- il **punto di diramazione** è caratterizzato da un punto con una freccia entrante e alcune frecce uscenti

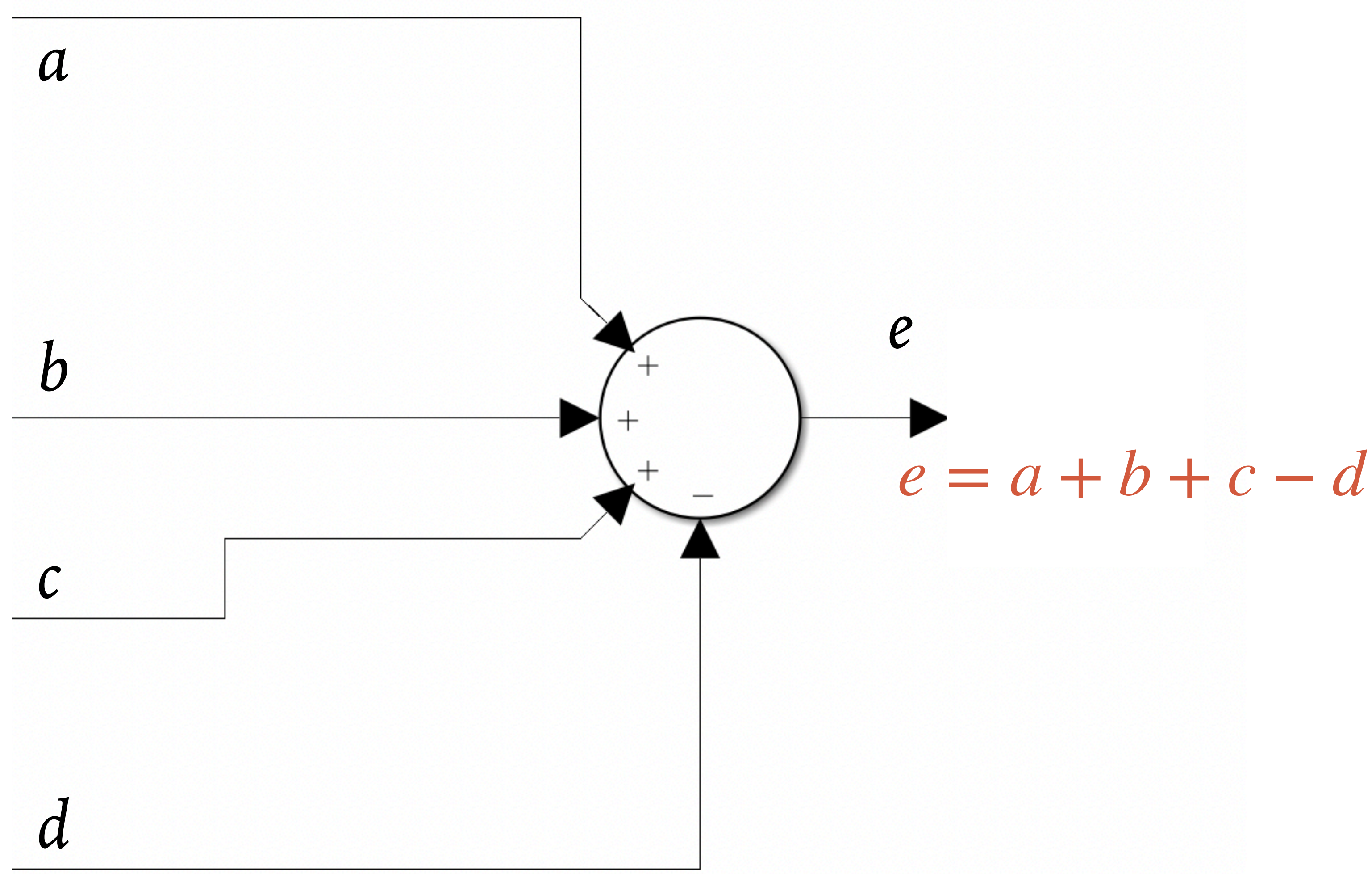


$b = a$

$c = a$

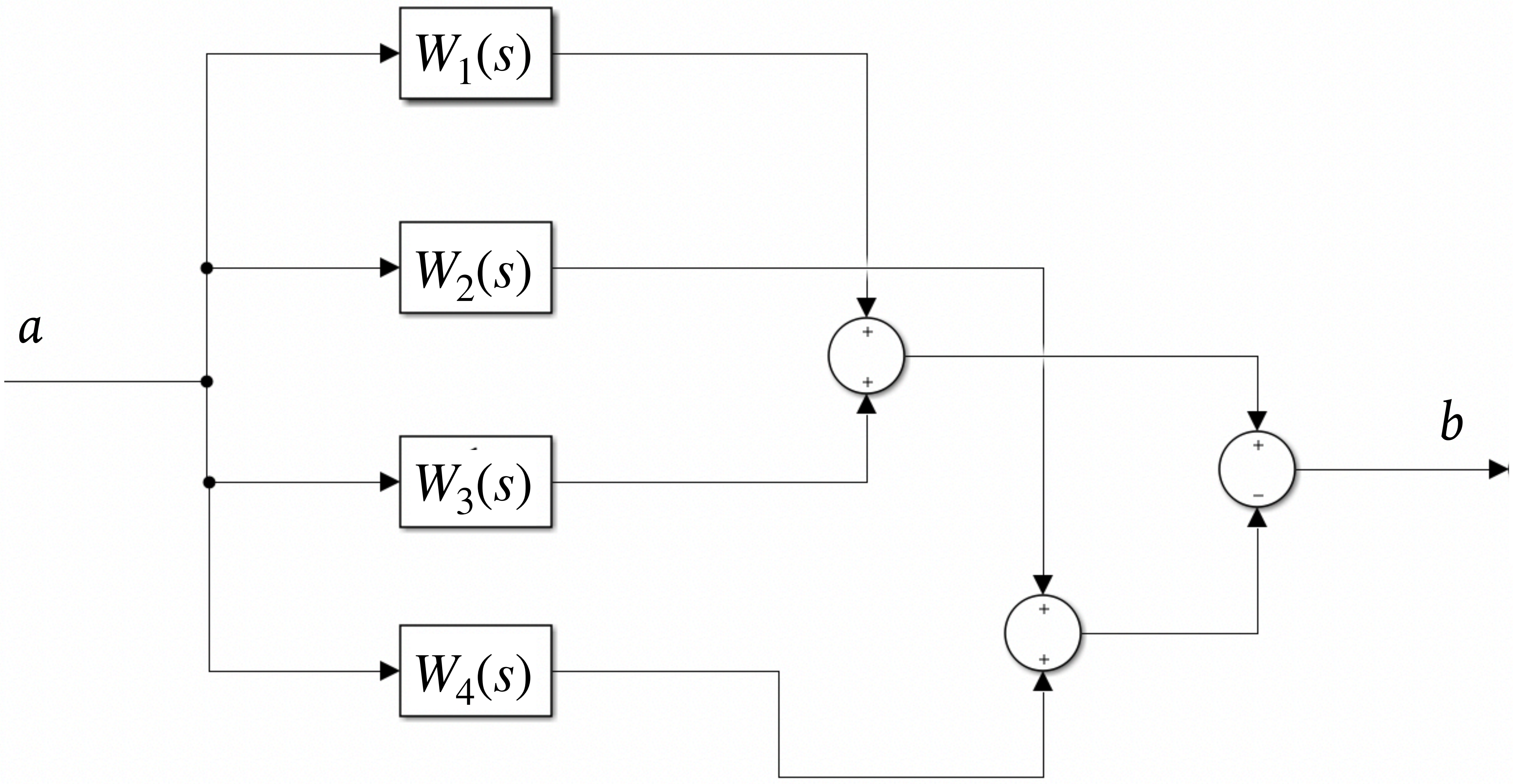
ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

- un **nodo sommatore** è caratterizzato da un cerchio con un freccia uscente e alcune frecce entranti caratterizzate da un segno



ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

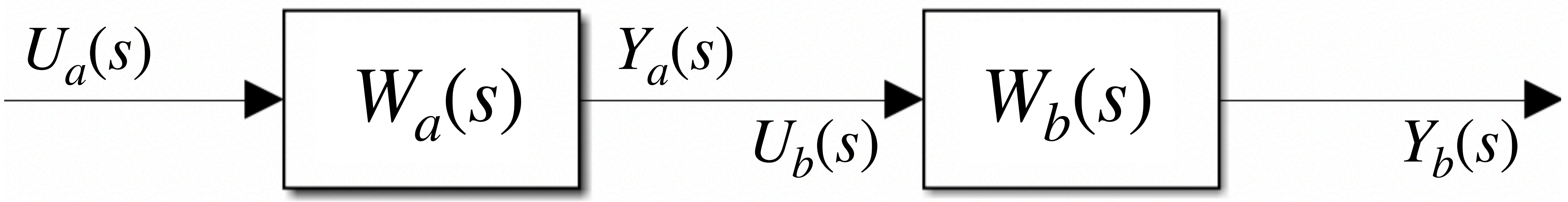
E' spesso utile saper calcolare, a partire da uno schema a blocchi, il legame tra due variabili



Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in SERIE quando l'uscita del primo $Y_a(s)$ coincide con ingresso del secondo $U_b(s)$



CONFIGURAZIONE SERIE

Il legame tra $U_a(s)$ e $Y_b(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s) = W_b(s) \cdot Y_a(s) = \cdots$$

$$\cdots = W_b(s) \cdot W_a(s) \cdot U_a(s)$$

$$W_{SERIE}(s) = W_b(s) \cdot W_a(s)$$

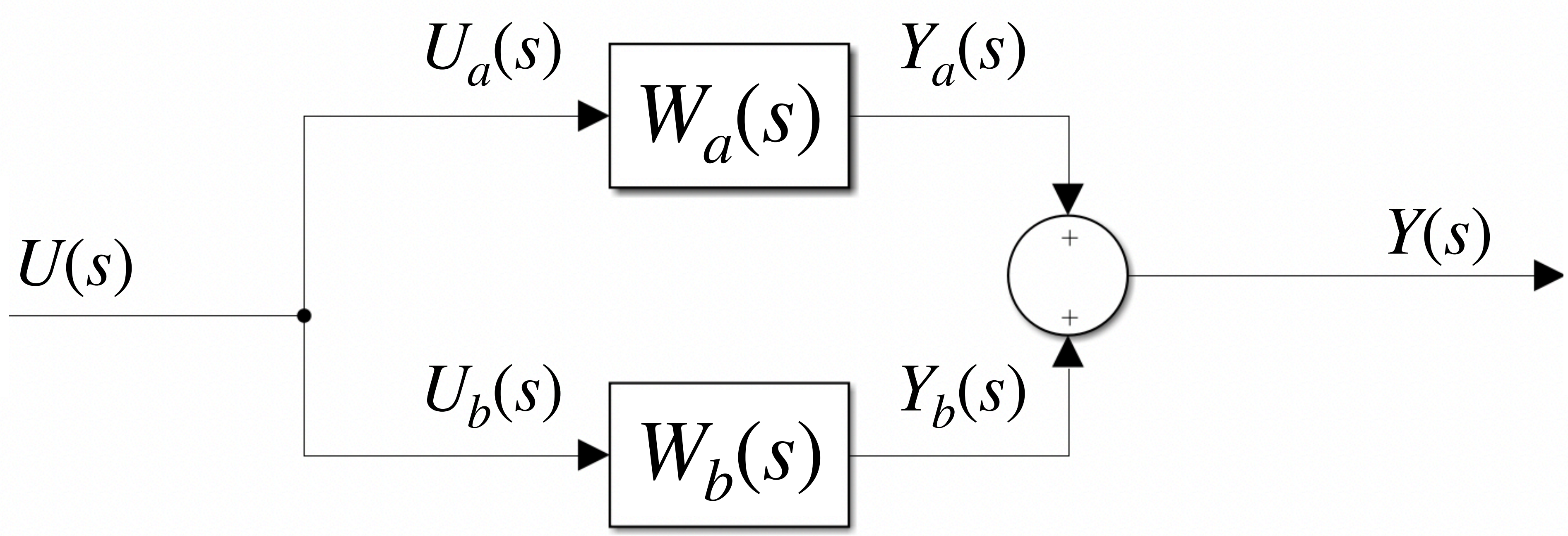
In assenza di cancellazioni Polo-Zero, la serie è **Asintoticamente Stabile** se e solo se lo sono i singoli sistemi

CONFIGURAZIONE PARALLELO

Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in <u>PARALLELO</u> se hanno lo stesso ingresso mentre le uscite si sommano



CONFIGURAZIONE PARALLELO

Il legame tra $U(s)$ e $Y(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s) = W_a(s) \cdot U(s) + W_b(s) \cdot U(s) = \cdots$$

$$\cdots = (W_a(s) + W_b(s)) \cdot U(s)$$

$$W_{PARALLELO}(s) = W_a(s) + W_b(s)$$

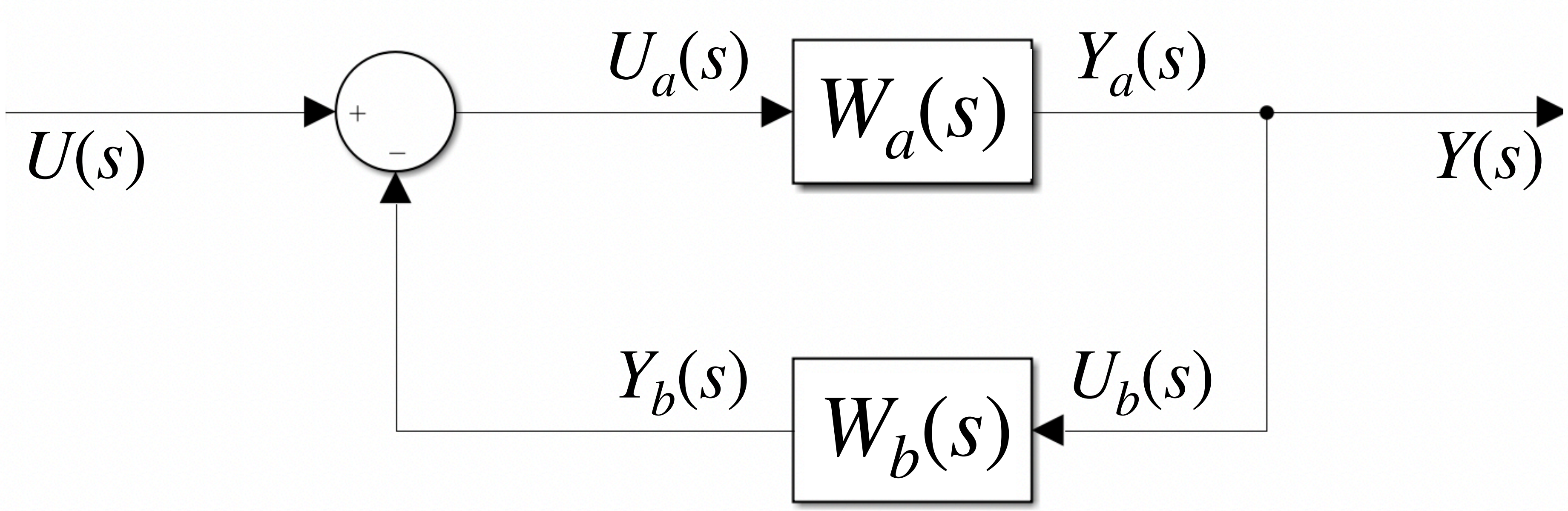
In assenza di cancellazioni Polo-Zero, il parallelo è **Asintoticamente Stabile** se e solo se lo sono i singoli sistemi

CONFIGURAZIONE RETROAZIONE

Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in <u>RETROAZIONE</u> se costituiscono un anello chiuso come indicato in figura



CONFIGURAZIONE RETROAZIONE

Il legame tra $U(s)$ e $Y(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y(s) = Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s) = W_a(s) \cdot (U(s) - Y_b(s)) = \cdots$$
$$\cdots = W_a(s) \cdot (U(s) - W_b(s) \cdot Y_a(s))$$

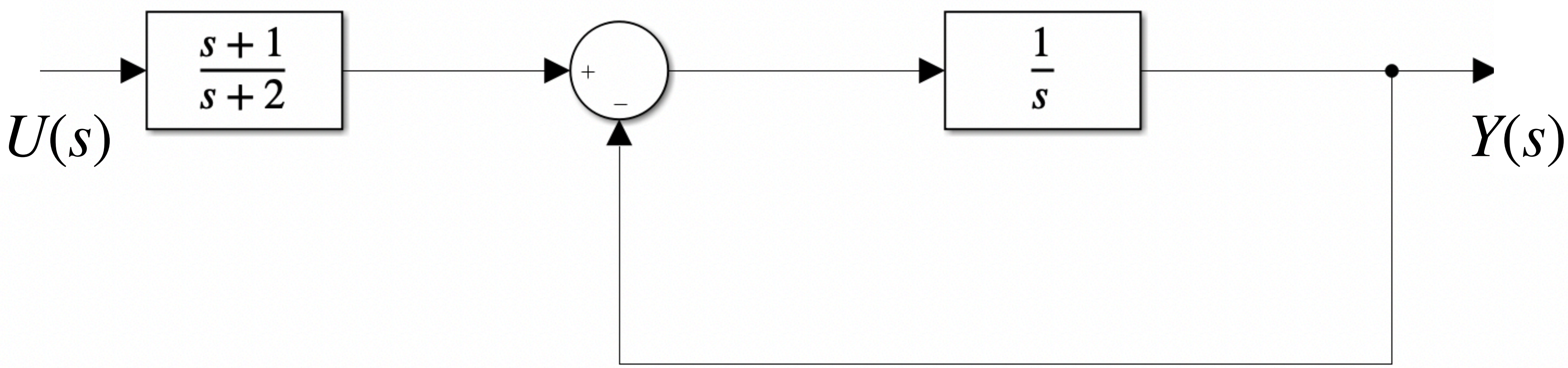
$$W(s) = \frac{W_a(s)}{1 + W_a(s) \cdot W_b(s)}$$

~~In assenza di cancellazioni Polo-Zero, la retroazione è **Asintoticamente Stabile** se e solo se lo sono i singoli sistemi~~

RIDUZIONE DI SCHEMI A BLOCCHI

- Regole di calcolo delle funzioni di trasferimento di sistemi costituiti da sottosistemi connessi in serie, parallelo e retroazione possono essere utilizzati più volte in sequenza per elaborare schemi a blocchi complessi

ESEMPIO #3



$$W(s) = \frac{s+1}{s+2} \cdot \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+2}$$

SERIE

RETROAZIONE

PASSAGGIO IU – ISU

Si consideri il problema del passaggio dalla rappresentazione IU ad **una** rappresentazione ISU

$$W(s) \rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

UNICA

NON UNICA

PASSAGGIO IU – ISU

Si consideri il caso di un sistema SISO

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_3 - a_3 b_0 \\ \vdots \\ b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x(t) + b_0 u(t)$$

ESEMPIO #4

Calcolare una rappresentazione ISU equivalente

$$W(s) = \frac{2s^2 + 4s + 3}{s^4 + 10s^3 + 5s^2 - 2s + 8}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + [0]\, u(t)$$