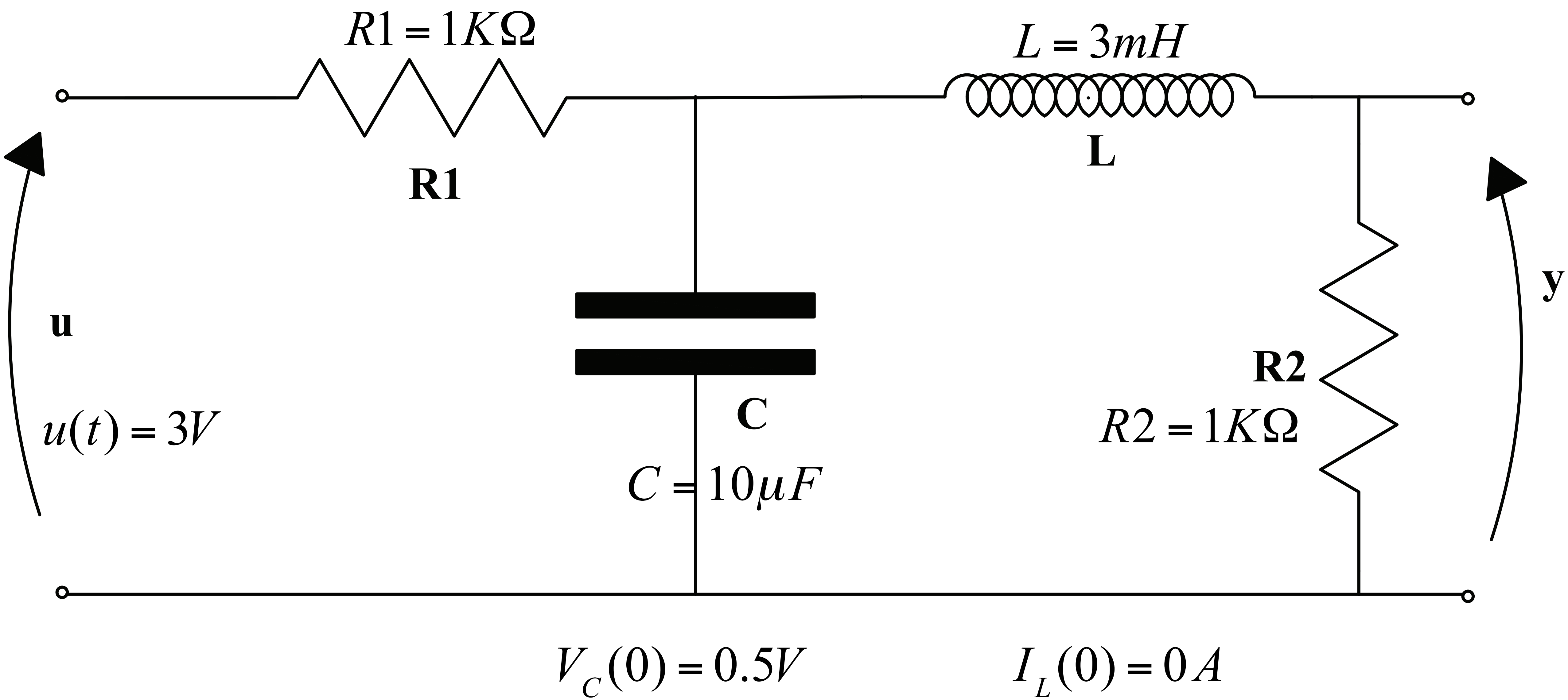
Automatica

A.A. 2023/2024

APPLICAZIONI TRASFORMATA DI LAPLACE

ESEMPIO

- Calcolare come varia nel tempo la tensione ai capi di R2



RISPOSTA SISTEMA LINEARE STAZIONARIO

➤ Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

➤ La risposta del sistema ha la seguente forma

.

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A \cdot t} x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} B \cdot u(\tau) \cdot d\tau \\ y(t) &= C e^{A \cdot t} x_0 + \int_0^t C e^{A \cdot (t-\tau)} B u(\tau) \cdot d\tau + D u(t) \end{aligned} \qquad (2)$$

RISPOSTA SISTEMA LINEARE STAZIONARIO

- Si consideri il seguente sistema lineare stazi

Evoluzione libera nello stato

$$\ldots) + B \cdot u(t)$$
$$\ldots) + D \cdot$$

Evoluzione libera nell'uscita

- La risposta del sistema ha la

.

$$x(t) = e^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t e^{A \ldots} B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

$$y(t) = Ce^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t Ce^{A\cdot(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau + Du(t) \qquad (2)$$

RISPOSTA SISTEMA LINEARE STAZIONARIO

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \ldots \\ y(t) = \ldots \end{cases} \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Evoluzione forzata nello stato

- La risposta del sistema ha la seguente forma

.

$$x(t) = e^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}B \cdot u(\tau)\cdot d\tau \qquad (2)$$

$$\ldots + \int_0^t Ce^{A\cdot(t-\tau)}Bu(\tau)\cdot d\tau + Du(t)$$

Evoluzione forzata nell'uscita

TRASFORMATA DI LAPLACE

- Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \geq 0,$ la Trasformata di Laplace di f(t) è la funzione complessa di variabile reale $F : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ legata biunivocamente a *f* dalle seguenti relazioni

.

$$F(s) = \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{3}$$

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[F(s)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\bar{\alpha}-j\infty}^{\bar{\alpha}+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{4}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathscr{L}\left[\dot{f}(t)\right] = s\mathscr{L}\left[f(t)\right] - f(0) = sF(s) - f(0) \tag{5}$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \tag{6}$$

$$\mathscr{L}\left[-tf(t)\right] = \frac{dF}{ds} \tag{7}$$

$$\mathscr{L}\left[1(t-T)f(t-T)\right] = e^{-sT}F(s) \tag{8}$$

$$\mathscr{L}\left[e^{\alpha t}f(t)\right] = F(s-\alpha) \tag{9}$$

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(s)\cdot G(s) \tag{10}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE

- Supponiamo esista finito $\lim_{t\to 0} f(t)$

Teorema

valore iniziale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \tag{11}$$

- Supponiamo esista finito $\lim_{t\to\infty} f(t)$

Teorema

valore finale

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s) \tag{12}$$

TABELLA TRASFORMATE NOTEVOLI

$$\delta(t-T) \rightleftharpoons e^{-sT}$$

$$1(t-T) \rightleftharpoons \frac{e^{-sT}}{s}$$

$$e^{\lambda t} \rightleftharpoons \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\frac{t^{n-1}e^{\lambda t}}{(n-1)!} \rightleftharpoons \frac{1}{\left(s-\lambda\right)^n}$$

$$e^{\alpha t}\sin\omega t \rightleftharpoons \frac{\omega}{\left(s-\alpha\right)^2+\omega^2}$$

$$e^{\alpha t}\cos\omega t \rightleftharpoons \frac{\left(s-\alpha\right)}{\left(s-\alpha\right)^2+\omega^2}$$

$$ae^{\alpha t}\cos\omega t+\frac{b+\alpha a}{\omega}e^{\alpha t}\sin\omega t \rightleftharpoons \frac{as+b}{\left(s-\alpha\right)^2+\omega^2}$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (s \cdot I - A)^{-1} B U(s) = \cdots$$
$$\cdots = \Phi(s) x(0) + H(s) U(s) \tag{12}$$

$$Y(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (C(s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s) = \cdots$$
$$\cdots = \Psi(s) x(0) + W(s) U(s) \tag{13}$$

IL CALCOLO DELLA RISPOSTA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Trasformata Laplace

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + H(s)U(s)$$
$$Y(s) = \Psi(s)x(0) + W(s)U(s)$$

Anti-Trasformata Laplace

$$x(t) = e^{A \cdot t}x_0 + \int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)}B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$
$$y(t) = Ce^{A \cdot t}x_0 + \int_0^t Ce^{A \cdot (t-\tau)}Bu(\tau) \cdot d\tau + Du(t)$$

IL CALCOLO DELLA RISPOSTA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

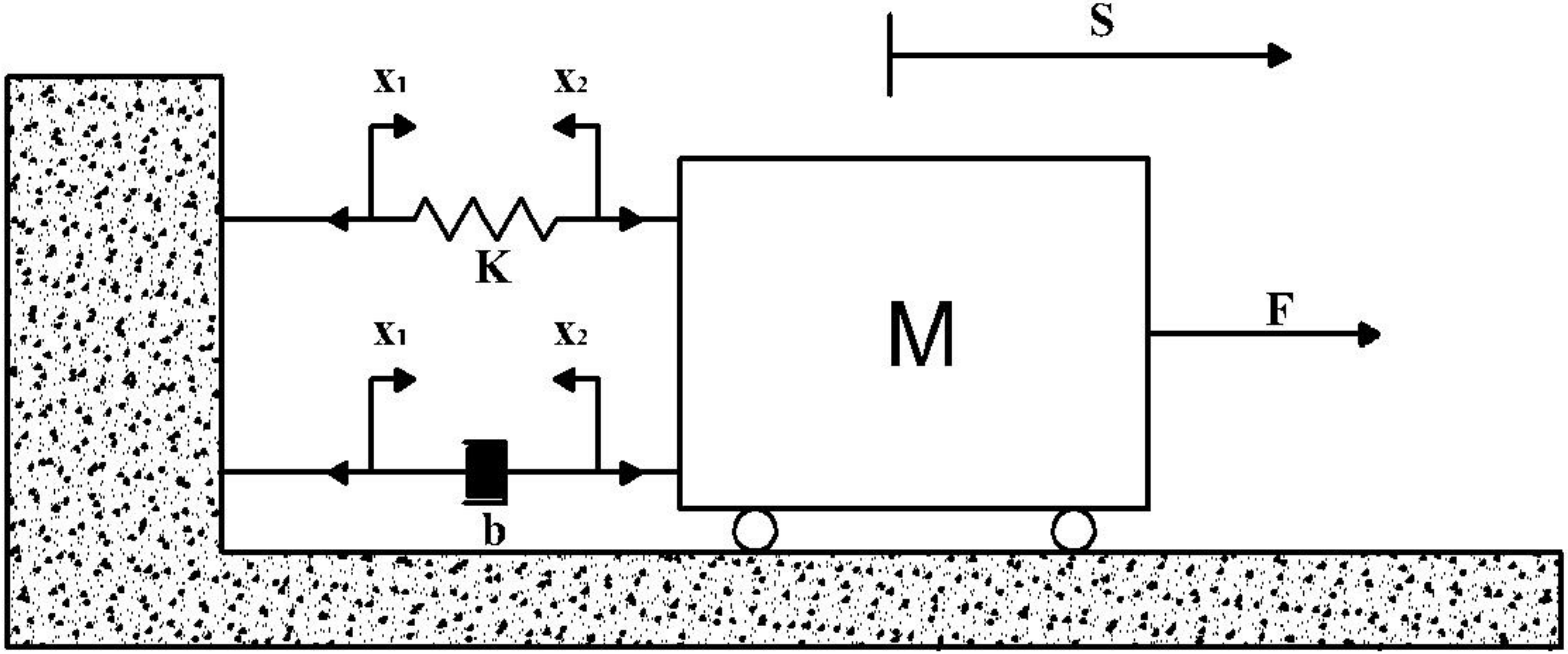
Trasformata Laplace

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + H(s)U(s)$$
$$Y(s) = \Psi(s)x(0) + W(s)U(s)$$

Anti-Trasformata Laplace

$$x(t) = e^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$
$$y(t) = Ce^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t Ce^{A\cdot(t-\tau)}Bu(\tau) \cdot d\tau + Du(t)$$

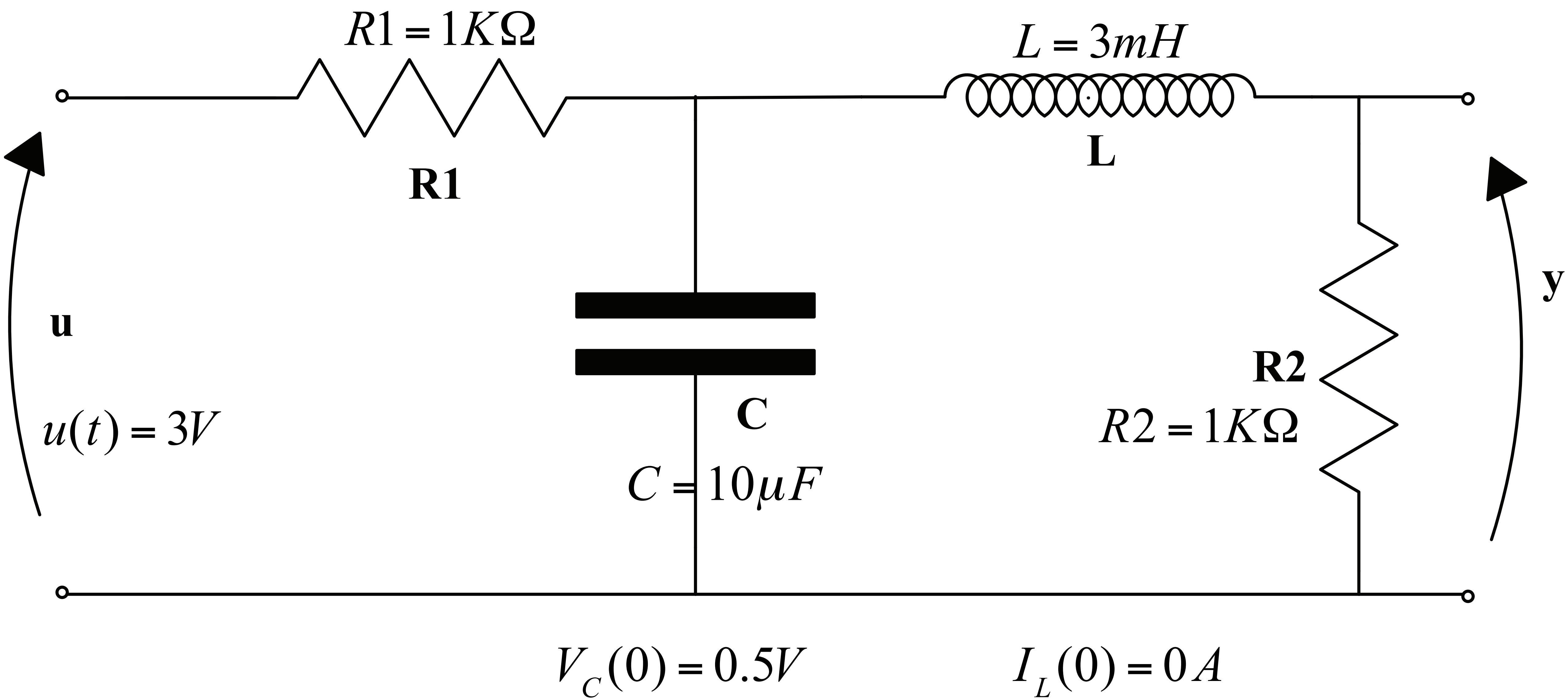
ESERCIZIO #1



Si consideri il sistema rappresentato in figura. Siano ***M***=1, ***K***=1 e ***b***=1. Sia u(t) un segnale di tipo gradino. Si determini la legge oraria dello spostamento della massa ***M***

ESEMPIO

- Calcolare come varia nel tempo la tensione ai capi di R2



APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il ... ema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \ldots \\ y(t) = C \ldots \end{cases} \quad \ldots(0) = x_0$$

Evoluzione <u>libera</u> nello stato

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = \boxed{(s \cdot I - A)^{-1}x(0)} + (s \cdot I - A)^{-1}BU(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s)x(0) \ldots$$

$$Y(s) = \boxed{C(s \cdot I - A)^{-1}x(0)} + \ldots) = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s)x(0) \ldots$$

Evoluzione <u>libera</u> nell'uscita

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il ... ma lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot \ldots \quad \ldots) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Evoluzione

forzata nello

stato

- Applico operatore trasformata ed ottengo

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1}x(0) + \boxed{(s \cdot I - A)^{-1}BU(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s)x(0) + H(s)U(s)$$

$$Y \ldots + \boxed{(C(s \cdot I - A)^{-1}B + D) \cdot U(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s)x(0) + W(s)U(s)$$

Evoluzione

forzata

nell'uscita

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = \boxed{(s \cdot I - A)^{-1} x(0)} + (s \cdot I - A)^{-1} B U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \boxed{\Phi(s) x(0)} + H(s) U(s)$$

$$Y(s) = \boxed{C(s \cdot I - A)^{-1} x(0)} + (C(s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \boxed{\Psi(s) x(0)} + W(s) U(s)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1}x(0) + \boxed{(s \cdot I - A)^{-1}BU(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s)x(0) + \boxed{H(s)U(s)}$$

$$Y(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}x(0) + \boxed{(C(s \cdot I - A)^{-1}B + D) \cdot U(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s)x(0) + \boxed{W(s)U(s)}$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D \qquad (14)$$

- E' detta funzione di trasferimento o rappresentazione IU
- Rappresenta nel dominio di Laplace il legame tra l'ingresso u e l'uscita y
- Nel caso di sistemi SISO, è una funziona razionale fratta

.

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \qquad (15)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Le radici del polinomio al numeratore sono detti ZERI della funzione di trasferimento

- Le radici del polinomio al denominatore sono detti POLI della funzione di trasferimento

RELAZIONE TRA POLI E AUTOVALORI MATRICE A

- Confrontando (14) e (15) si ottiene che

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D = C\frac{adj(s \cdot I - A)}{|s \cdot I - A|}B + D = \cdots$$

$$\cdots = \frac{C \cdot adj(s \cdot I - A) \cdot B + D \cdot |s \cdot I - A|}{|s \cdot I - A|}$$

$$|s \cdot I - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n$$

- In assenza di cancellazioni POLO-ZERO, i POLI di W(s) coincidono con le radici del polinomio caratteristico di A .

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

- Il grado del numeratore sarà sempre minore o uguale al grado del denominatore (sistema causale).
- Il grado del numeratore è pari al quello del denominatore $b_0 \neq 0$ se e solo se la matrice $D \neq 0$ (**sistema proprio**)
- Una f.d.t con grado del numeratore minore del grado del denominatore identifica un sistema **strettamente proprio** (D=0)