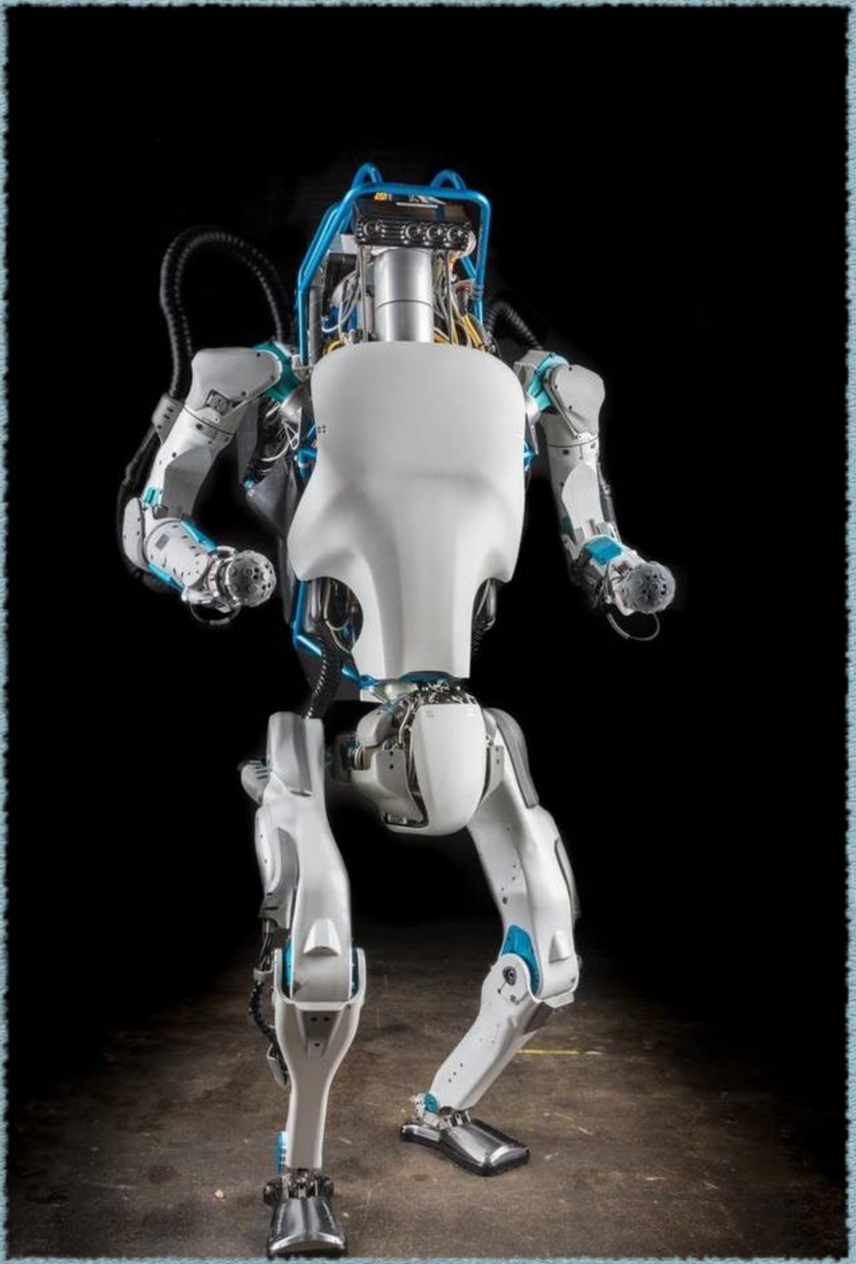
  

Automatica

A.A. 2023/2024

RISPOSTA IN FREQUENZA

PARTE I

INTRODUZIONE

- L'analisi nel dominio della frequenza dei sistemi dinamici lineari e stazionari costituisce uno degli strumenti più potenti per lo studio di alcune importanti proprietà
- L'analisi in frequenza di un sistema si basa in prima istanza sullo studio del suo comportamento quando esso viene sollecitato da un ingresso di tipo sinusoidale.
- Tuttavia grazie al principio di sovrapposizione degli effetti può essere estesa a classi di segnali ben più ampie.

INTRODUZIONE

- Si potranno infatti prendere in considerazione tutte quelle funzioni per cui è possibile effettuare una scomposizione armonica che permette di rappresentare il segnale come una combinazione lineare di un numero finito o infinito di componenti sinusoidali.

- Ricadono in questa famiglia le funzioni periodiche sviluppabili in **serie di Fourier** e le funzioni dotate di **trasformata di Fourier**

RICHIAMI TRASFORMATA DI FOURIER

- Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la Trasformata di Fourier di f(t) è la funzione complessa di variabile reale $F : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ legata biunivocamente a f dalle seguenti relazioni

.

$$F(j\omega) = \mathscr{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[F(j\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

RICHIAMI TRASFORMATA DI FOURIER

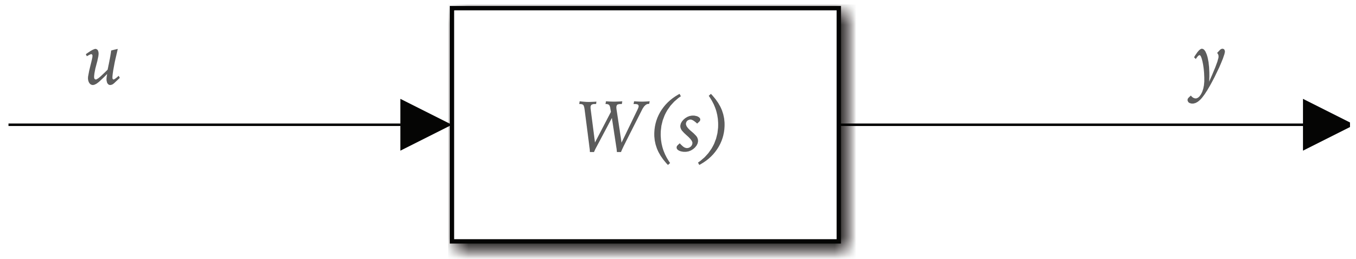
- Si noti che se $f(t)$ è nulla per valori negativi di t, sotto opportune ipotesi la Trasformata di Fourier di $f(t)$ coincide con la trasformata di Laplace valutata sull'asse immaginario

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \Big|_{s=j\omega} = \cdots$$

$$\cdots = \mathscr{L}\left[f(t)\right]_{s=j\omega} = F(s)\,|_{s=j\omega}$$

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

- Si consideri un sistema SISO Asintoticamente Stabile



$$u(t) = U_0 \cdot sin(\omega t + \phi)$$

$$y_\infty(t) = U_0 \cdot |W(s)|_{s=j\omega} sin(\omega t + \phi + \angle W(s)|_{s=j\omega})$$

- Il numero complesso $W(j\omega)$ è detta risposta in frequenza del sistema con f.d.t $W(s)$

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

Si consideri la forma fattorizzata di una generica f.d.t. W(s)

$$W(s)=\frac{\mu\prod_i\left(1+sT_i\right)^{z_i}\prod_h\left(\frac{s^2}{\omega_h^2}+\frac{2\xi_h s}{\omega_h}+1\right)^{z_h}}{s^g\prod_j\left(1+s\tau_j\right)^{z_j}\prod_k\left(\frac{s^2}{\omega_k^2}+\frac{2\xi_k s}{\omega_k}+1\right)^{z_k}}$$

a cui corrisponde la seguente risposta in frequenza W(jω)

$$W(j\omega)=\frac{\mu\prod_i\left(1+j\omega T_i\right)^{z_i}\prod_h\left(j\frac{2\xi_h\omega}{\omega_h}+1-\frac{\omega^2}{\omega_h^2}\right)^{z_h}}{(j\omega)^g\prod_j\left(1+j\omega\tau_j\right)^{z_j}\prod_k\left(j\frac{2\xi_k\omega}{\omega_k}+1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)^{z_k}}$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- Per i sistemi SISO la forma più usata per rappresentare graficamente la risposta in frequenza W(jω) associata alla funzione di trasferimento W(s) è quella dei **Digrammi di Bode**
- Essi sono costituiti da una coppia di curve che rappresentano in funzione della pulsazione il modulo è la fase di W
- Le due curve sono dette rispettivamente ***diagramma di Bode e del modulo*** e ***diagramma di Bode della fase***

DIAGRAMMA DI BODE: MODULO

- Nel Diagramma di Bode del modulo l'asse delle ordinate riporta in scala lineare il valore della risposta in frequenza espresso in dB (decibel)

$$\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|W(j\omega)\right|$$

- Per la scelta effettuata, il modulo in *dB* della risposta in frequenza può essere riscritto nella seguente forma

$$\begin{aligned}\left|W(j\omega)\right|_{dB} = {} & 20\log_{10}\left|\mu\right| - 20g\log_{10}\left|j\omega\right| + \sum_i 20z_i\log_{10}\left|1+j\omega T_i\right| - \\ & -\sum_j 20z_j\log_{10}\left|1+j\omega\tau_j\right| + \sum_h 20z_h\log_{10}\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_h^2}+j\frac{2\xi_h\omega}{\omega_h}\right| - \\ & -\sum_k 20z_k\log_{10}\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}+j\frac{2\xi_k\omega}{\omega_k}\right|\end{aligned}$$

DIAGRAMMA DI BODE: MODULO

- Il tracciamento del diagramma del modulo può essere compiuto considerando dapprima separatamente i singoli termini e successivamente sommando i relativi contributi

$$
\begin{aligned}
\left|W(j\omega)\right|_{dB} = {} & 20\log_{10}|\mu| - 20g\log_{10}|j\omega| + \sum_i 20z_i\log_{10}|1+j\omega T_i| - \\
& -\sum_j 20z_j\log_{10}|1+j\omega\tau_j| + \sum_h 20z_h\log_{10}\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_h^2}+j\frac{2\xi_h\omega}{\omega_h}\right| - \\
& -\sum_k 20z_k\log_{10}\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}+j\frac{2\xi_k\omega}{\omega_k}\right|
\end{aligned}
$$

- Per una analisi completa è sufficiente considerare il modulo della risposta in frequenza associata ai termini

μ	s^k	$(1+s\sigma)^k$	$\left(1+\frac{2\zeta_\sigma}{\omega_\sigma}s+\frac{s^2}{\omega_\sigma^2}\right)^k$

DIAGRAMMA DI BODE: MODULO

- Termine Costante $W(s) = \mu$

$$\left| W(j\omega) \right|_{dB} = 20 \cdot log_{10} |\mu|$$

a cui corrisponde un grafico costituito da una retta parallela all'ascissa con ordinata positiva, negativa o nulla a seconda che il modulo dell'argomento del logaritmo sia maggiore di uno, minore di uno, uguale ad uno

- Termine Monomio $W(s) = s^k$

$$\left| W(j\omega) \right|_{dB} = 20k \cdot log_{10} |\omega|$$

a cui corrisponde un grafico costituito da una retta con pendenza $20k \cdot dB/dec$ passante per il punto di coordinate $\left[\omega = 10^0, 0\, dB\right]$

DIAGRAMMA DI BODE: MODULO

- Termine Binomio $W(s) = (1 + sT)^k$

$$\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 20k\log_{10}\left|1 + j\omega T\right| = 20k\log_{10}\sqrt{1 + (\omega T)^2}$$

- Caso k=-1

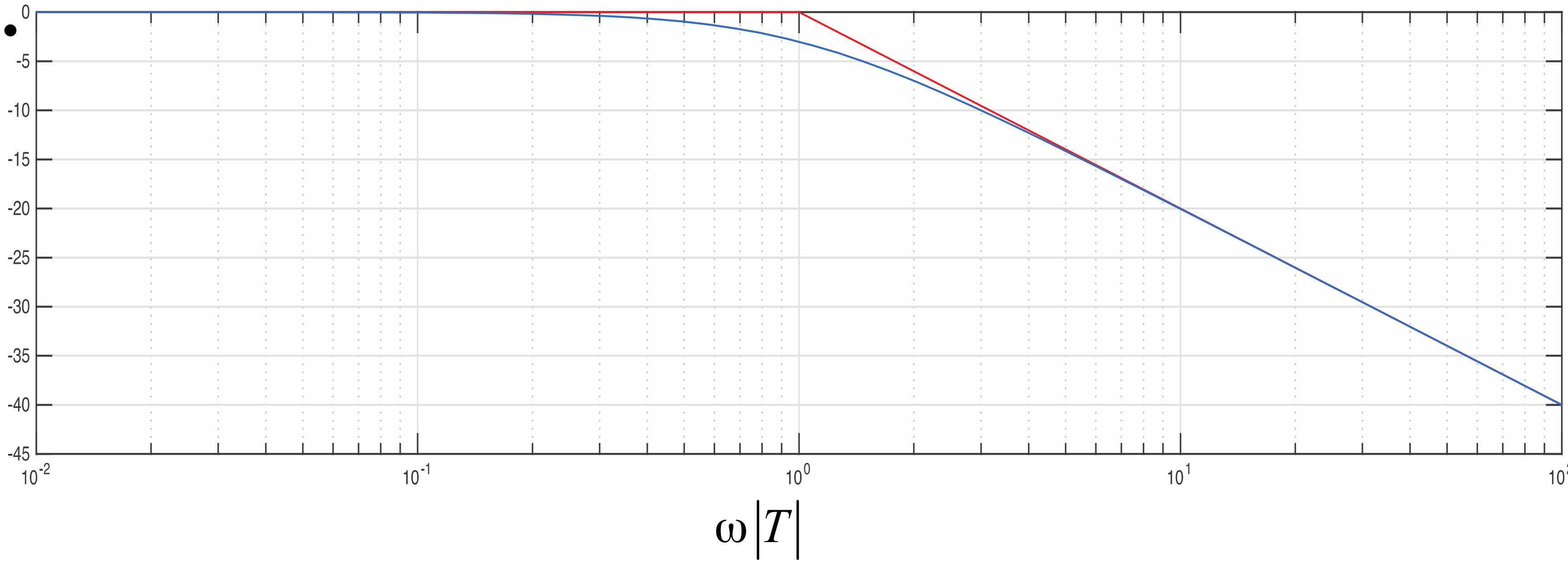


DIAGRAMMA DI BODE: MODULO

- Termine Trinomio $\quad W(s) = \left(1 + 2\dfrac{\xi s}{\omega_n} + \dfrac{s^2}{\omega_n^2}\right)^k$

$$\left|W(j\omega)\right|_{dB} = 20k\log_{10}\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi j\omega}{\omega_n}\right| = 20k\log_{10}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\frac{\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

- *Caso k=-1*