

Automatica

A.A. 2023/2024

**RISPOSTA
IN
FREQUENZA**

PARTE II

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

Si consideri la forma fattorizzata di una generica f.d.t. $W(s)$

$$W(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + sT_i)^{z_i} \prod_h \left(\frac{s^2}{\omega_h^2} + \frac{2\xi_h s}{\omega_h} + 1 \right)^{z_h}}{s^g \prod_j (1 + s\tau_j)^{z_j} \prod_k \left(\frac{s^2}{\omega_k^2} + \frac{2\xi_k s}{\omega_k} + 1 \right)^{z_k}}$$

a cui corrisponde la seguente risposta in frequenza $W(j\omega)$

$$W(j\omega) = \frac{\mu \prod_i (1 + j\omega T_i)^{z_i} \prod_h \left(j \frac{2\xi_h \omega}{\omega_h} + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} \right)^{z_h}}{(j\omega)^g \prod_j (1 + j\omega \tau_j)^{z_j} \prod_k \left(j \frac{2\xi_k \omega}{\omega_k} + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} \right)^{z_k}}$$

DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- Nel Diagramma di Bode della fase, l'asse delle ordinate riporta in scala lineare, tarata in gradi o radianti, il valore

$$\arg W(j\omega)$$

- L'argomento della risposta in frequenza può essere riscritta nella seguente forma

$$\begin{aligned} \arg W(j\omega) = & \arg \mu - g \arg(j\omega) + \sum_i z_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_j z_j \arg(1 + j\omega \tau_j) \\ & + \sum_h z_h \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} + j \frac{2\xi_h \omega}{\omega_h}\right) - \sum_k z_k \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} + j \frac{2\xi_k \omega}{\omega_k}\right) \end{aligned}$$

DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- Il tracciamento del diagramma della fase della risposta in frequenza può essere compiuto considerando dapprima separatamente i singoli termini e successivamente sommando i relativi contributi

$$\begin{aligned} \arg W(j\omega) = & \arg \mu - g \arg(j\omega) + \sum_i z_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_j z_j \arg(1 + j\omega \tau_j) \\ & + \sum_h z_h \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} + j \frac{2\xi_h \omega}{\omega_h}\right) - \sum_k z_k \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_k^2} + j \frac{2\xi_k \omega}{\omega_k}\right) \end{aligned}$$

- Per una analisi completa è sufficiente considerare l'argomento della risposta in frequenza associata ai termini

μ	s^k	$(1 + s\sigma)^k$	$\left(1 + \frac{2\zeta_\sigma}{\omega_\sigma} s + \frac{s^2}{\omega_\sigma^2}\right)^k$
-------	-------	-------------------	--

DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- *Termine Costante* $W(s) = \mu$

$$\arg W(j\omega) = \arg \mu = \begin{cases} 0^\circ, & \mu > 0 \\ -180^\circ, & \mu < 0 \end{cases}$$

a cui corrisponde una retta parallela all'asse delle pulsazioni con ordinata 0° o -180° .

- *Termine Monomio* $W(s) = s^g$

$$\arg W(j\omega) = g \cdot \arg(j\omega) = g \cdot 90^\circ$$

a cui corrisponde una retta parallela all'asse delle pulsazioni con ordinata $g \cdot 90^\circ$

DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- *Termine Binomio* $W(s) = (1 + sT)^k \quad T > 0$

$$\arg W(j\omega) = k \arg(1 + j\omega T)$$

- *Caso $k=-1$*

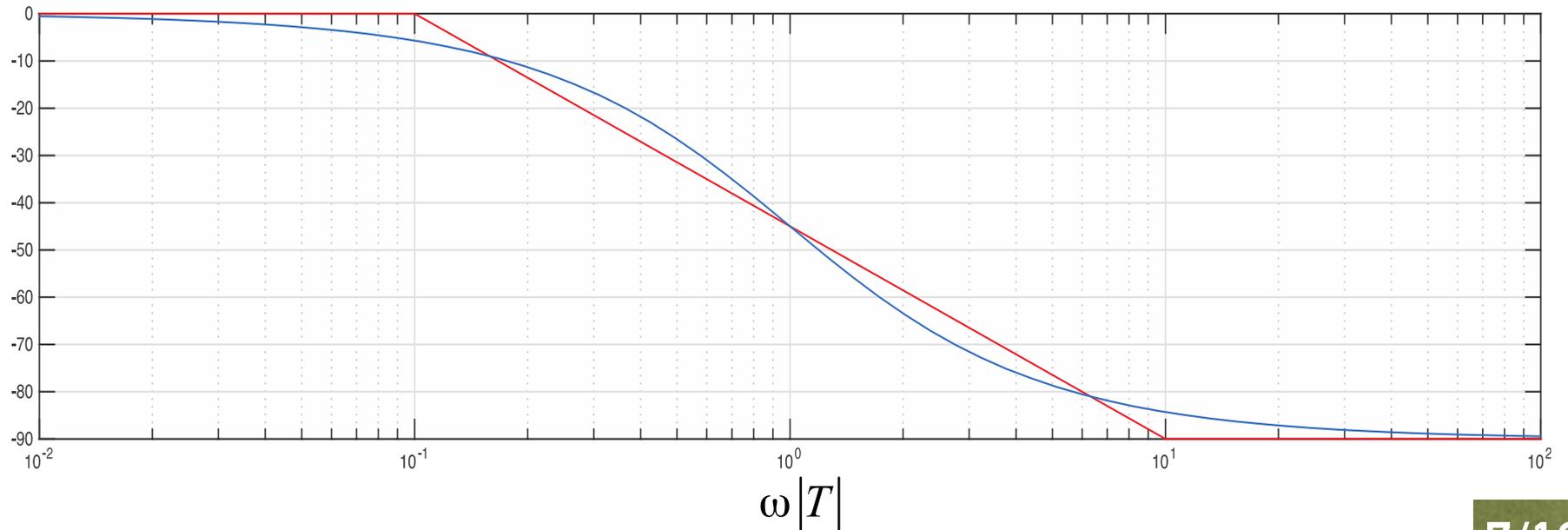


DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- *Termine Binomio* $W(s) = (1 + sT)^k \quad T < 0$

$$\arg W(j\omega) = k \arg(1 + j\omega T)$$

- *Caso $k=-1$*

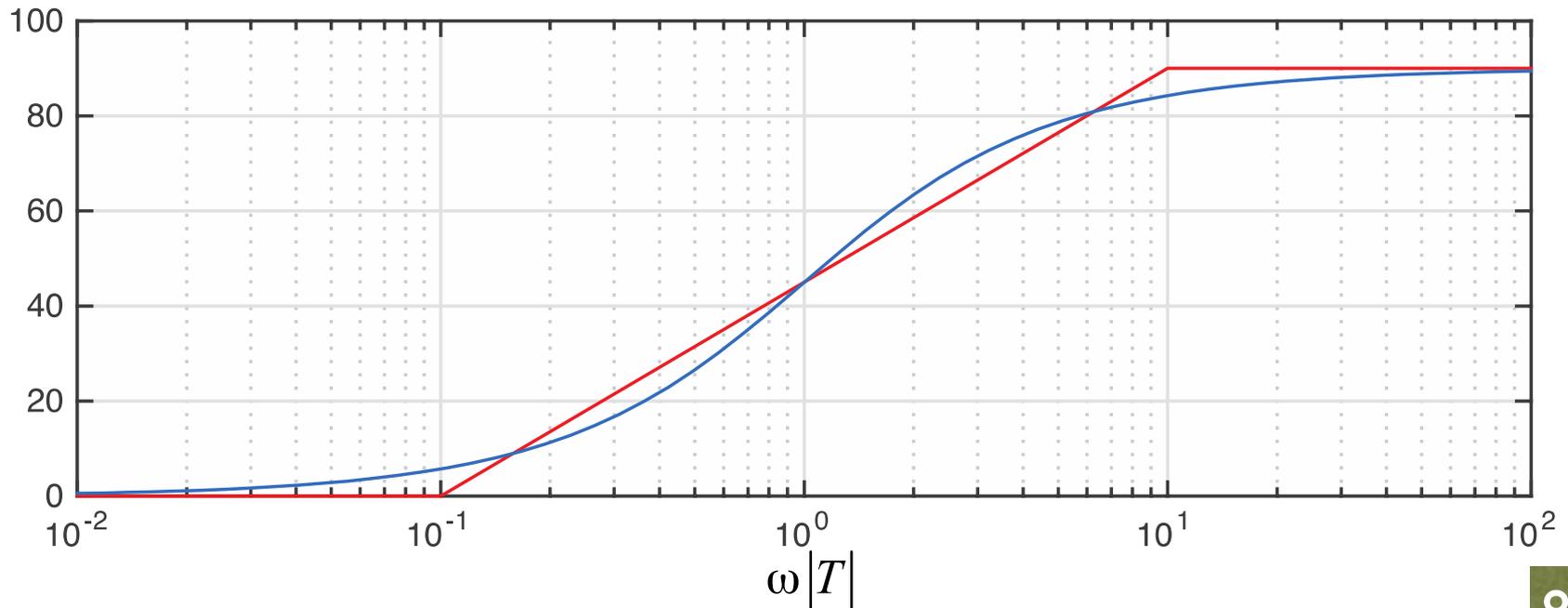


DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- *Termine Trinomio* $W(s) = \left(1 + 2\frac{\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^k \quad \xi \in [0,1]$

$$\arg W(j\omega) = k \arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi j\omega}{\omega_n}\right)$$

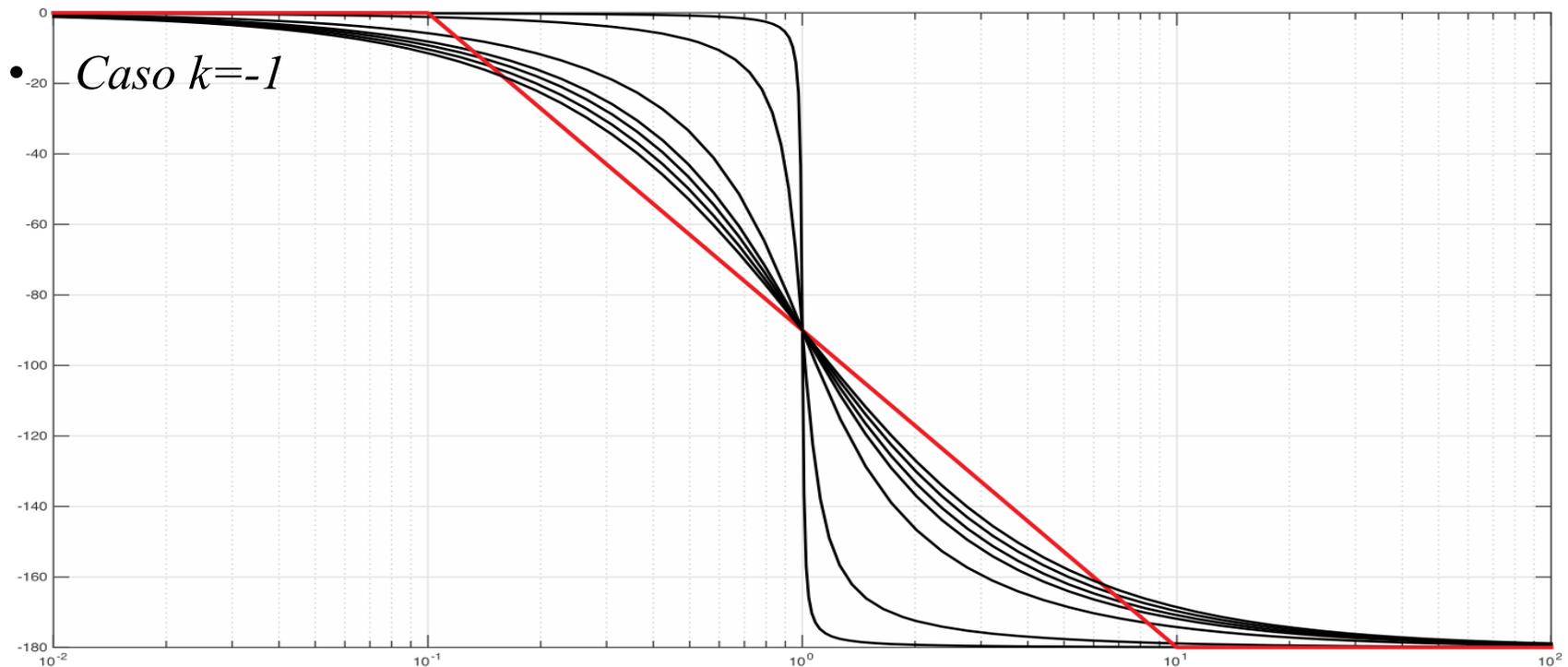


DIAGRAMMA DI BODE: FASE

- *Termine Trinomio* $W(s) = \left(1 + 2\frac{\xi s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^k \quad \xi \in [-1, 0)$

$$\arg W(j\omega) = k \arg \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi j\omega}{\omega_n}\right)$$

