

**TEORIA DEI SISTEMI E  
FONDAMENTI DI TEORIA DEL CONTROLLO-  
AUTOMATICA**

---

**FONDAMENTI DI TEORIA DEL CONTROLLO  
A TEMPO CONTINUO:  
STABILITÀ E PRESTAZIONI**

# DEFINIZIONE DI UN PROBLEMA DI CONTROLLO

**Processo**



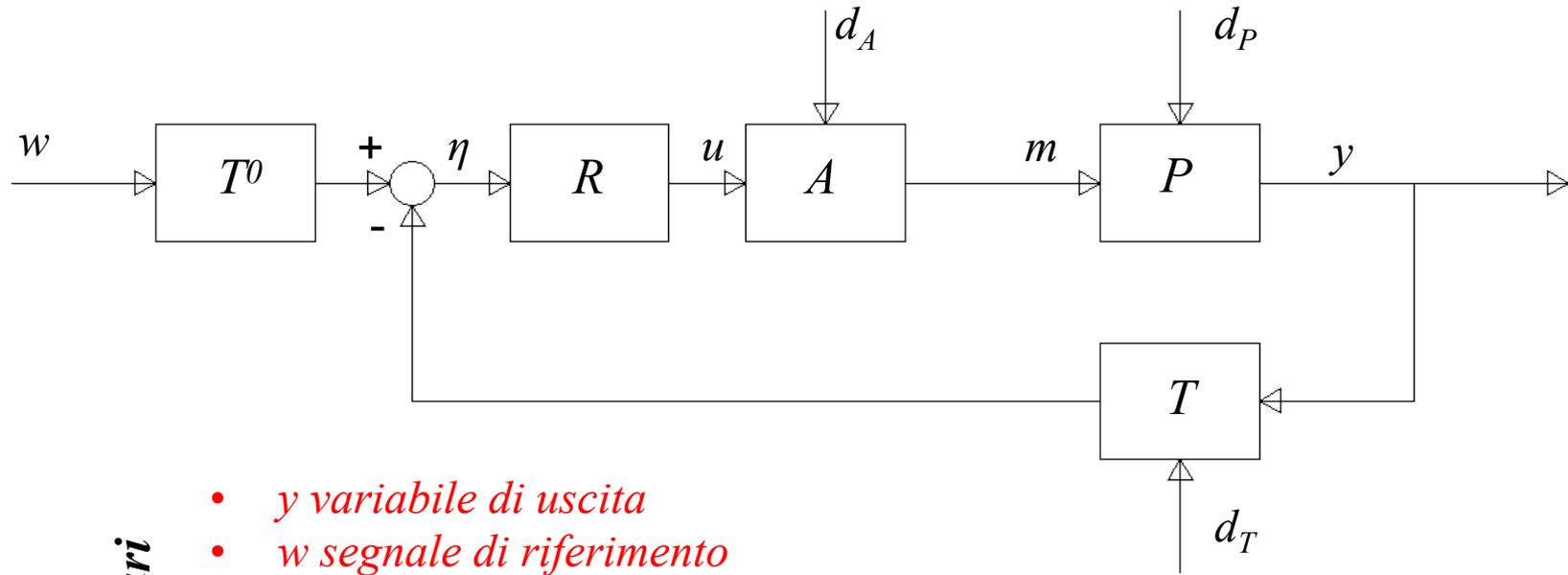
**Funzionamento  
Desiderato**

**Problema di Controllo**

Imporre un funzionamento desiderato ad un processo assegnato

# SCHEMA GENERALE IN RETROAZIONE

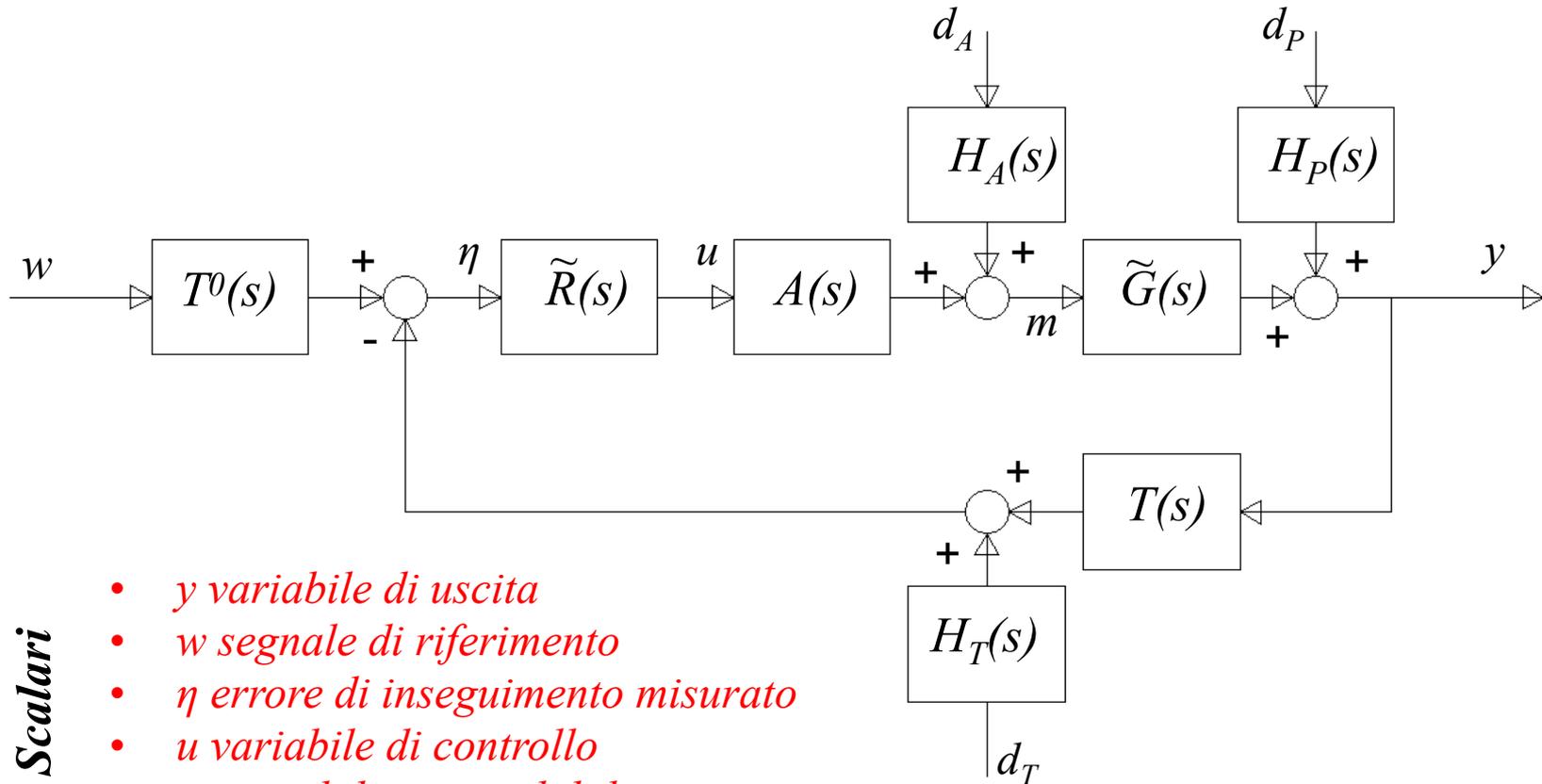
- Si consideri il seguente schema di controllo a ciclo chiuso



*Segnali Scalari*

- $y$  variabile di uscita
- $w$  segnale di riferimento
- $\eta$  errore di inseguimento misurato
- $u$  variabile di controllo
- $m$  variabile manipolabile
- $d_A$  disturbo di attuazione
- $d_P$  disturbo di processo
- $d_T$  disturbo di misura
- $P$  processo
- $T$  e  $T^0$  trasduttori
- $R$  regolatore
- $A$  attuatore

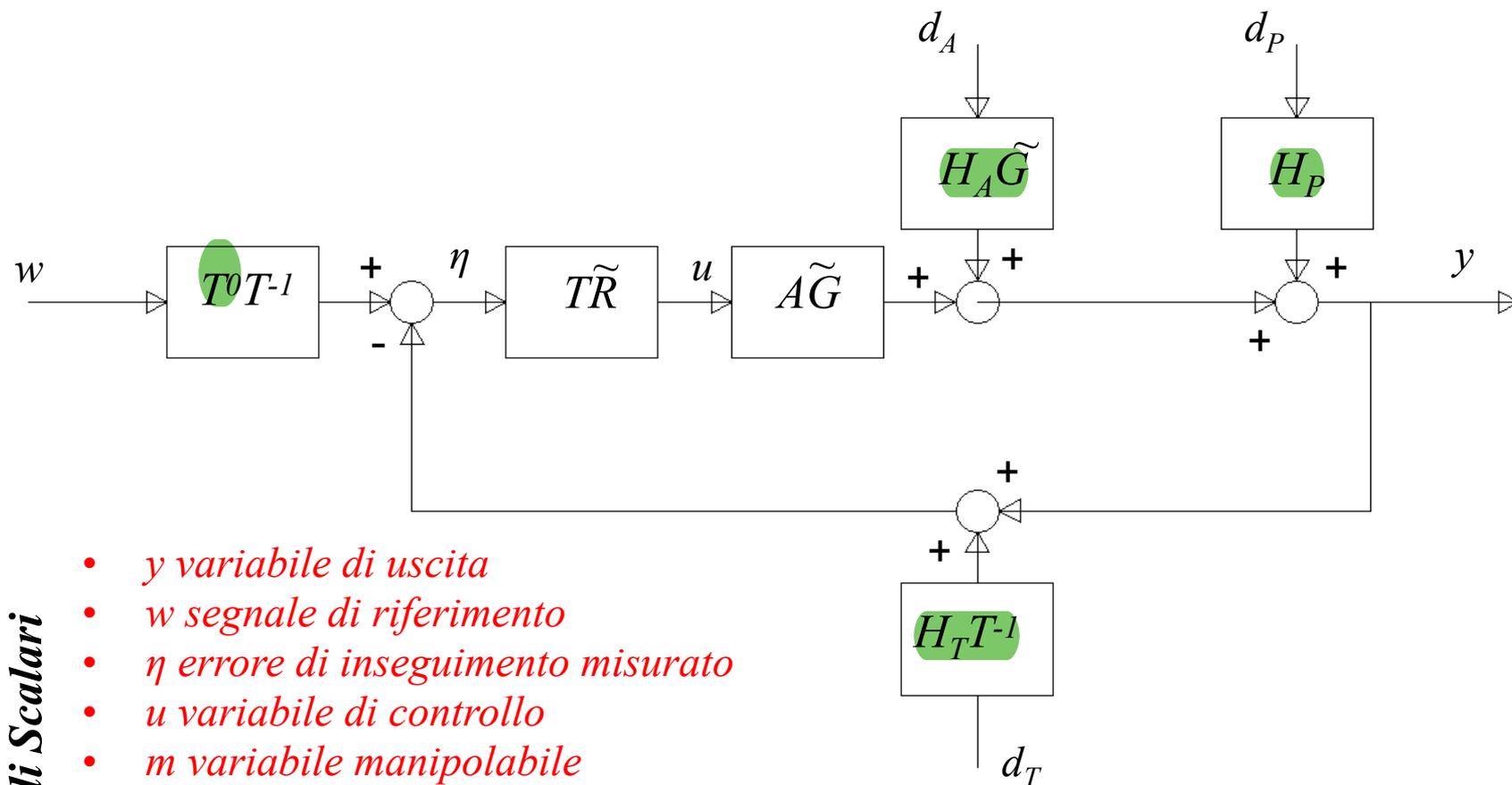
# CASO LINEARE



*Segnali Scalari*

- $y$  variabile di uscita
- $w$  segnale di riferimento
- $\eta$  errore di inseguimento misurato
- $u$  variabile di controllo
- $m$  variabile manipolabile
- $d_A$  disturbo di attuazione
- $d_P$  disturbo di processo
- $d_T$  disturbo di misura

# CASO LINEARE

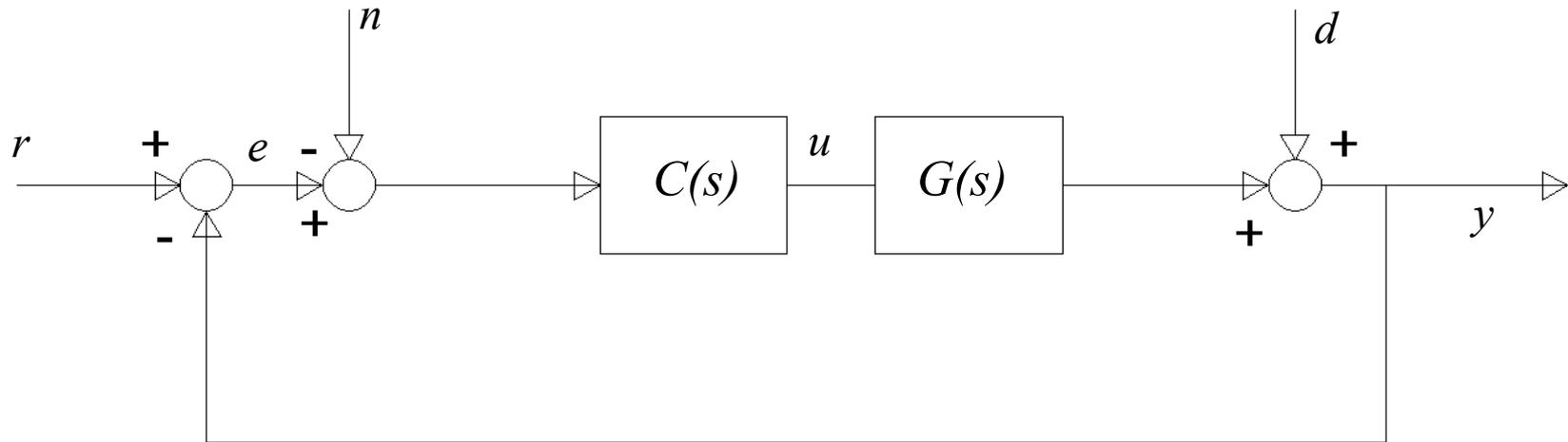


*Segnali Scalari*

- $y$  variabile di uscita
- $w$  segnale di riferimento
- $\eta$  errore di inseguimento misurato
- $u$  variabile di controllo
- $m$  variabile manipolabile
- $d_A$  disturbo di attuazione
- $d_P$  disturbo di processo
- $d_T$  disturbo di misura

# SCHEMA DI CONTROLLO IN RETROAZIONE

---



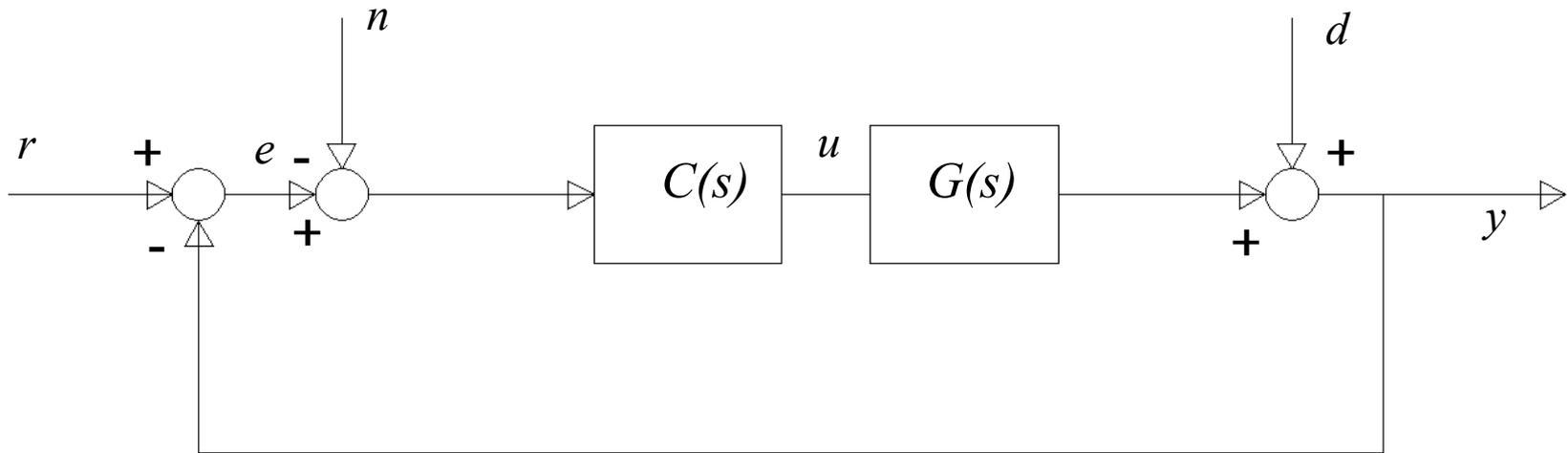
## *Segnali Scalari*

- $y$  variabile di uscita
- $r$  segnale di riferimento
- $e$  errore di inseguimento del controllo
- $u$  variabile di controllo
- $d$  disturbo di processo
- $n$  disturbo di misura

## *Sistemi Lineari*

- $G(s)$  processo
- $C(s)$  regolatore

# FUNZIONI DI SENSITIVITÀ



$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}$$

***Funzione di Sensitività***

$$F(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

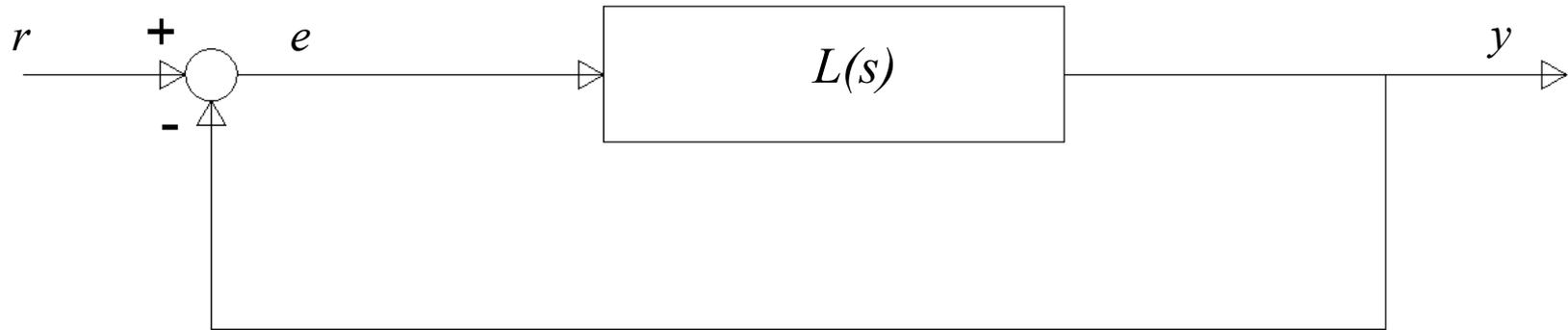
***Funzione di Sensitività Complementare***

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

***Funzione di Sensitività del Controllo***

# STABILITÀ NOMINALE

---



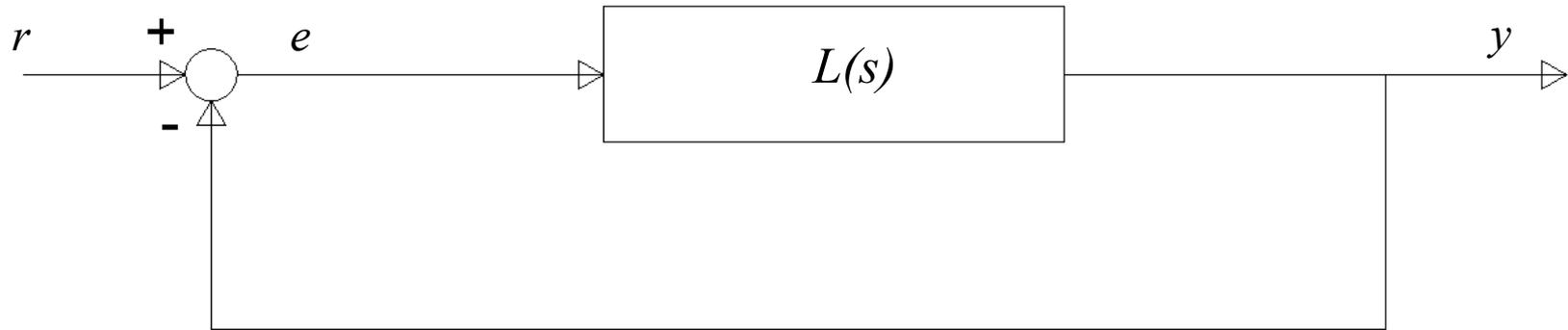
- *L'asintotica stabilità del sistema retroazionato si analizza verificando che tutte le radici dell'equazione caratteristica abbiano parte reale minore di zero*

$$1 + L(s) = 0$$

- *Questa verifica puo' essere effettuata ricorrendo ai classici strumenti di analisi (Routh, Cartesio) che pero' risultano di scarsa utilità pratica nella soluzione di problemi di sintesi di un regolatore*

# CRITERIO DI NYQUIST

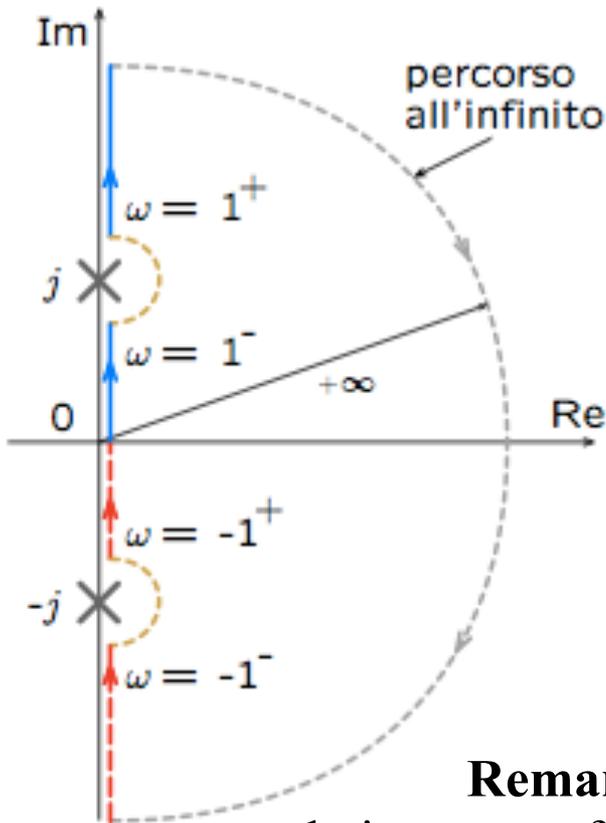
---



- Sia  $P$  il numero di poli di  $L(s)$  a parte reale maggiore di zero e  $N$  il numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist della funzione di anello  $L(s)$  attorno al punto critico  $-1+j0$ , conteggiati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente in senso orario
- Si supponga che il diagramma di Nyquist non passi per il punto  $-1+j0$
- *Il sistema in figura è asintoticamente stabile se e solo se  $N=P$*

# DIAGRAMMA DI NYQUIST

- Si definisce diagramma di Nyquist associato alla funzione di trasferimento  $M(s)$ , l'immagine attraverso  $M(s)$  della curva chiusa del piano  $s$  rappresentata in figura detta percorso di Nyquist



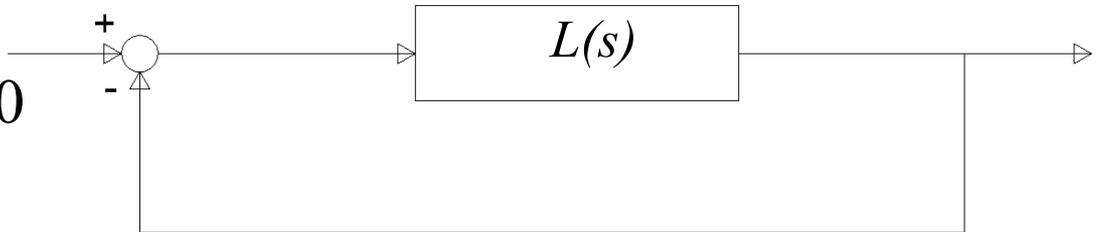
- Poichè  $M(-j\omega) = M^*(j\omega)$ , se  $M(s)$  è strettamente propria il diagramma di Nyquist si può determinare direttamente dal diagramma polare associato alla  $M(j\omega)$
- Esso è costituito dal diagramma polare stesso e dalla sua immagine speculare rispetto all'asse reale

**Remark.** Il percorso di Nyquist rappresentato in figura è relativo a una f.d.t.  $M(s)$  con singolarità in  $\pm j$

# ESERCIZIO #1

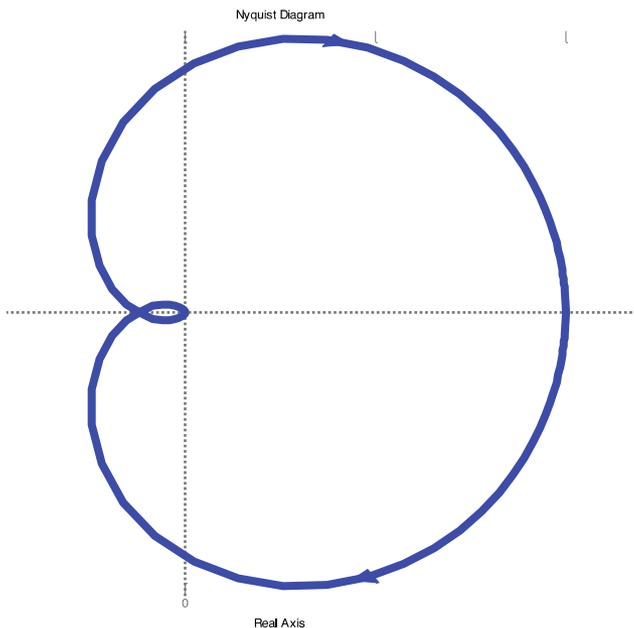
**Esempio.** Si determini l'insieme dei valori di  $\mu$  per cui il sistema in figura è asintoticamente stabile, essendo

$$L(s) = \frac{\mu}{(1+s)^3}, \quad \mu > 0$$



$$L(j\omega) = \frac{\mu}{(1+j\omega)^3} = \frac{\mu}{(1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)} =$$

$$= \frac{\mu}{(1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)} =$$
$$= \frac{\mu \left[ (1-3\omega^2) - j(3\omega - \omega^3) \right]}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2}$$



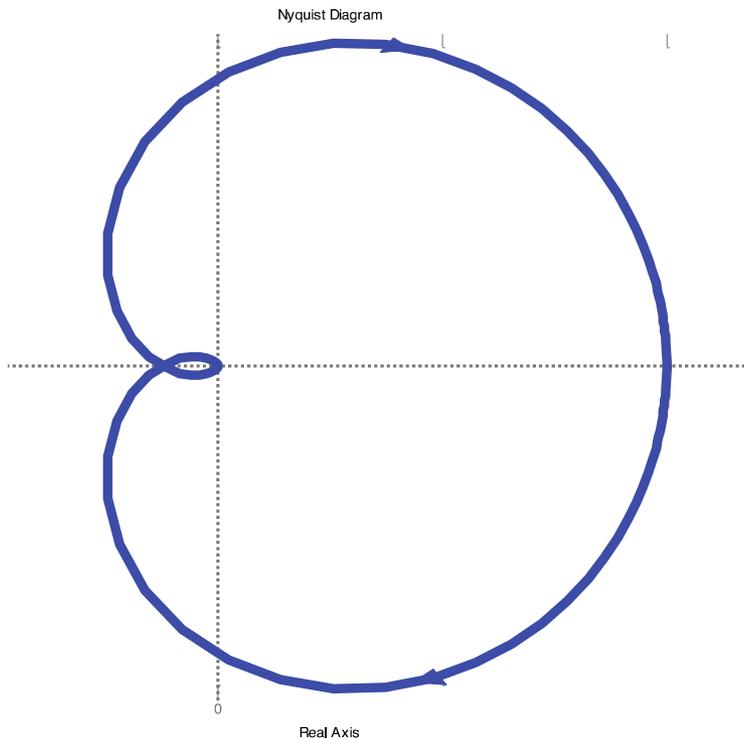
# CRITERIO DI NYQUIST

$$L(s) = \frac{\mu}{(1+s)^3}, \quad \mu > 0$$

$$\text{Im} \{L(j\omega)\} = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} |L(j\omega)| &= |\text{Re} \{L(j\omega)\}| = \\ &= \left| \frac{\mu}{1-9} \right| < 1 \end{aligned}$$

$$\mu < 8$$



# STABILITÀ IN CONDIZIONI PERTURBATE

---

- Nello studio della stabilità di un sistema retroazionato si è finora immaginato di conoscere con esattezza la funzione di trasferimento
- *Applicando il criterio di Nyquist è possibile giudicare la stabilità di un sistema di controllo in condizioni nominali, cioè quando il sistema vero si comporta esattamente come descritto dal modello*
- In tutti i casi pratici è opportuno tenere conto dell'inevitabile discrepanza tra il comportamento reale del sistema e quello ideale previsto dal modello
- *Supponendo di considerare un sistema retroazionato nominalmente stabile, si parlerà di stabilità robusta quando il sistema rimane stabile anche in presenza di "elevata" incertezza*
- La misura della stabilità robusta avviene per mezzo degli indicatori di robustezza, cioè parametri numerici capaci di quantificare il grado di robustezza di un sistema ovvero l'ampiezza delle massime perturbazioni sul modello che garantiscono che la proprietà di stabilità si conservata

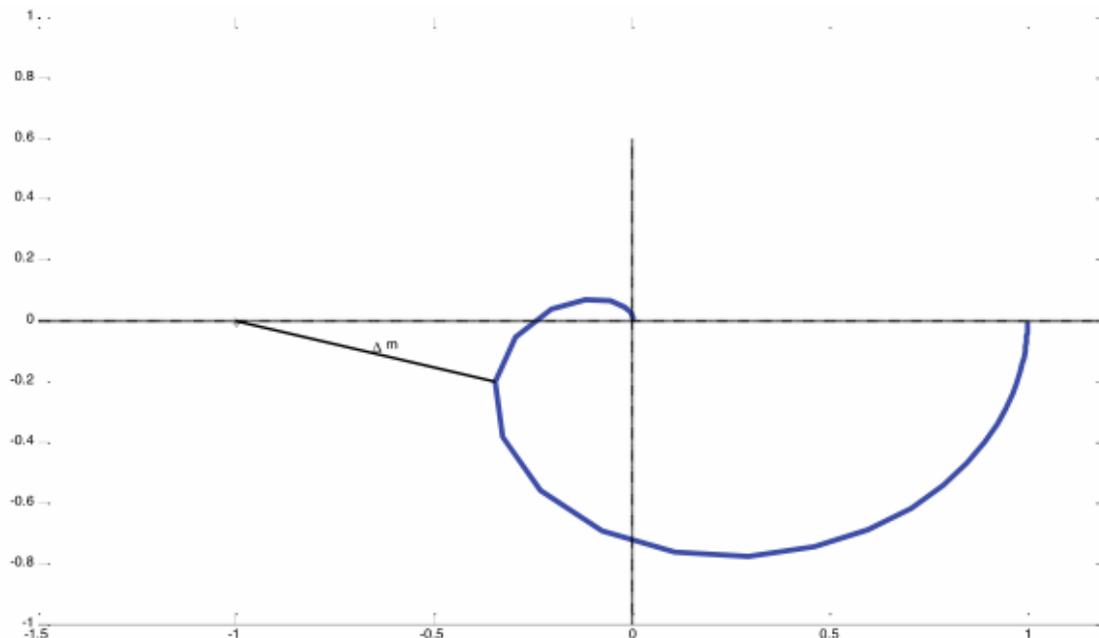
# MARGINE DI STABILITA' VETTORIALE

- *Si supponga per semplicità che la funzione d'anello  $L(s)$  non possieda poli con parte reale positiva ( $P=0$ ) e si assuma che il sistema sia asintoticamente stabile in condizioni nominali ( $N=0$ )*

Sia  $\Delta m$  la distanza nel piano complesso tra il punto  $-1$  e il digramma polare associata alla funzione d'anello .

$$\Delta m = \inf |1 + L(j\omega)|$$

Tale distanza viene chiamata margine di stabilità vettoriale.



- *Quanto più il diagramma polare si trova distante da  $-1+j0$  tanto più robusto è il sistema*

*La misura precisa del margine di stabilità vettoriale richiede tuttavia un tracciamento accurato del diagramma polare e pertanto non è facilmente stimabile*

# MARGINE DI GUADAGNO

*Si supponga che la funzione di trasferimento di anello  $L(s)$  abbia guadagno positivo e non possieda poli a parte reale maggiore di zero ( $P=0$ ).*

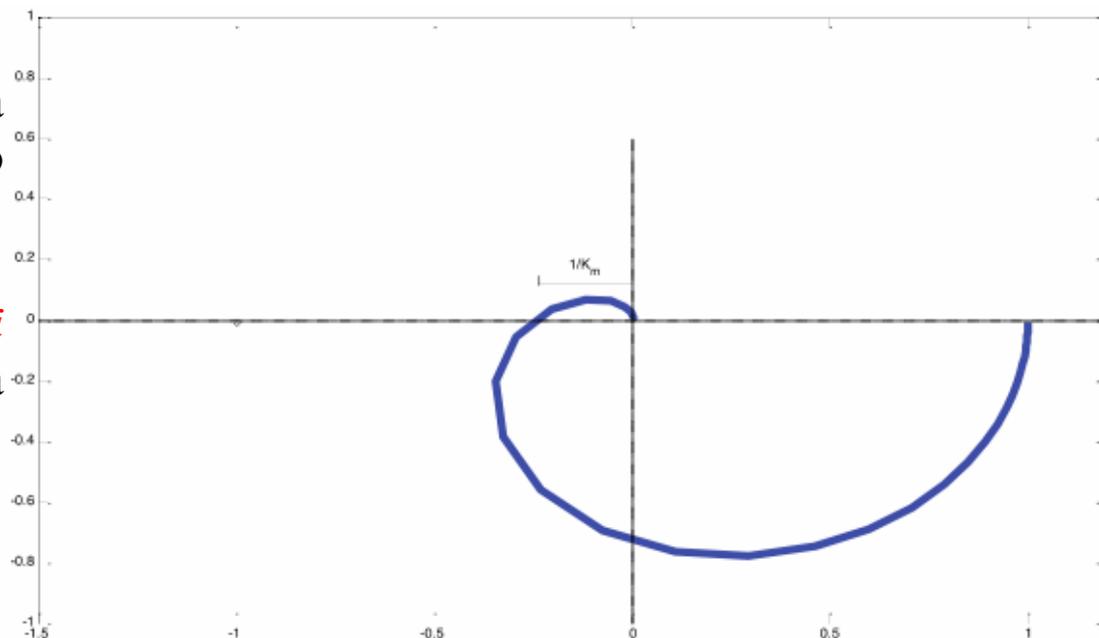
*Si supponga che  $\exists \omega_\pi : \arg(L(j\omega_\pi)) = -\pi$*

*Si supponga che il punto di intersezione  $A$  sia a destra del punto  $-1$ , cosicché il sistema retroazionato risulti asintoticamente stabile (Nyquist)*

Una misura del grado di stabilità è fornita dalla distanza del punto  $A$  da  $-1+j0$

Si definisce *margine di guadagno* del sistema retroazionato il valore

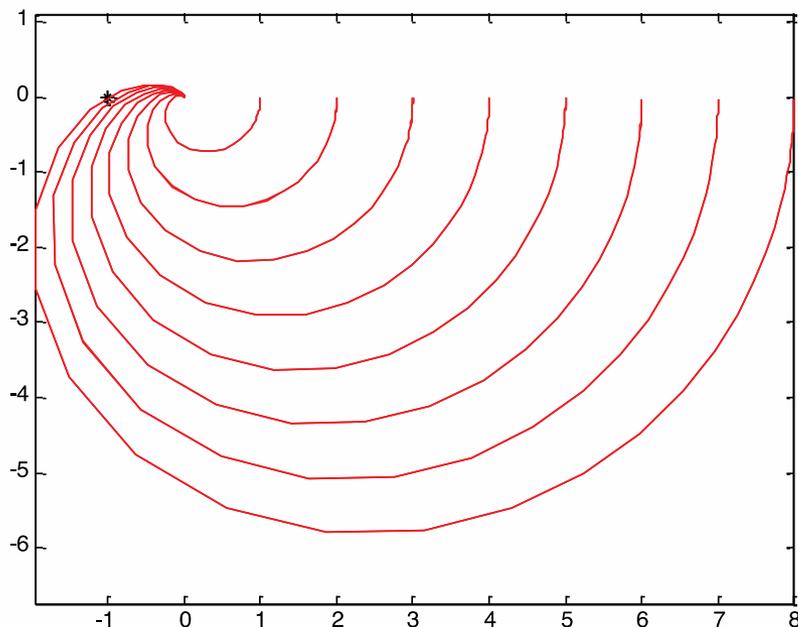
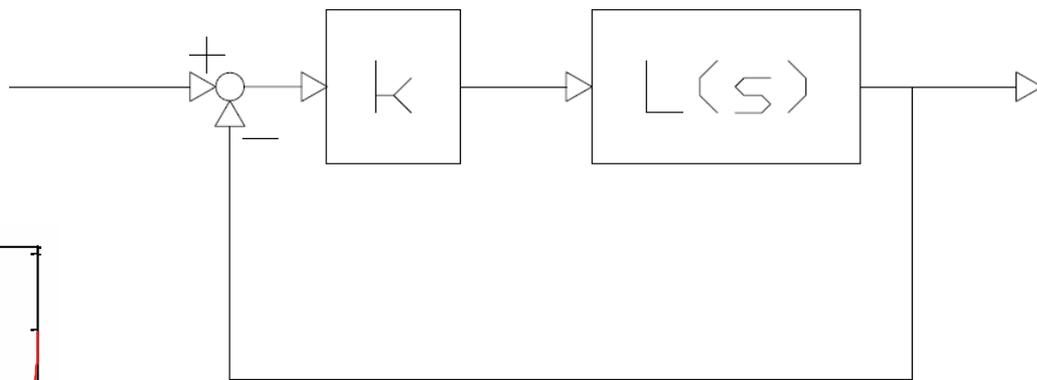
$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$



# MARGINE DI GUADAGNO

Per ricavare una interpretazione fisica del parametro *Margine di Guadagno* si consideri il seguente schema di controllo a ciclo chiuso.

*Sia  $L(s)$  conforme alle ipotesi fatte per la definizione del margine di guadagno.*



*Il ciclo chiuso è asintoticamente stabile per tutti i valori di  $k$  inferiori a  $k_m$*

*Il margine di guadagno rappresenta l'estremo superiore dei fattori moltiplicativi del guadagno di anello che il sistema può tollerare senza perdere la proprietà di asintotica stabilità a ciclo chiuso.*

*$K_m$  fornisce una misura del grado di robustezza della stabilità a fronte di possibili incertezze sul guadagno di anello*

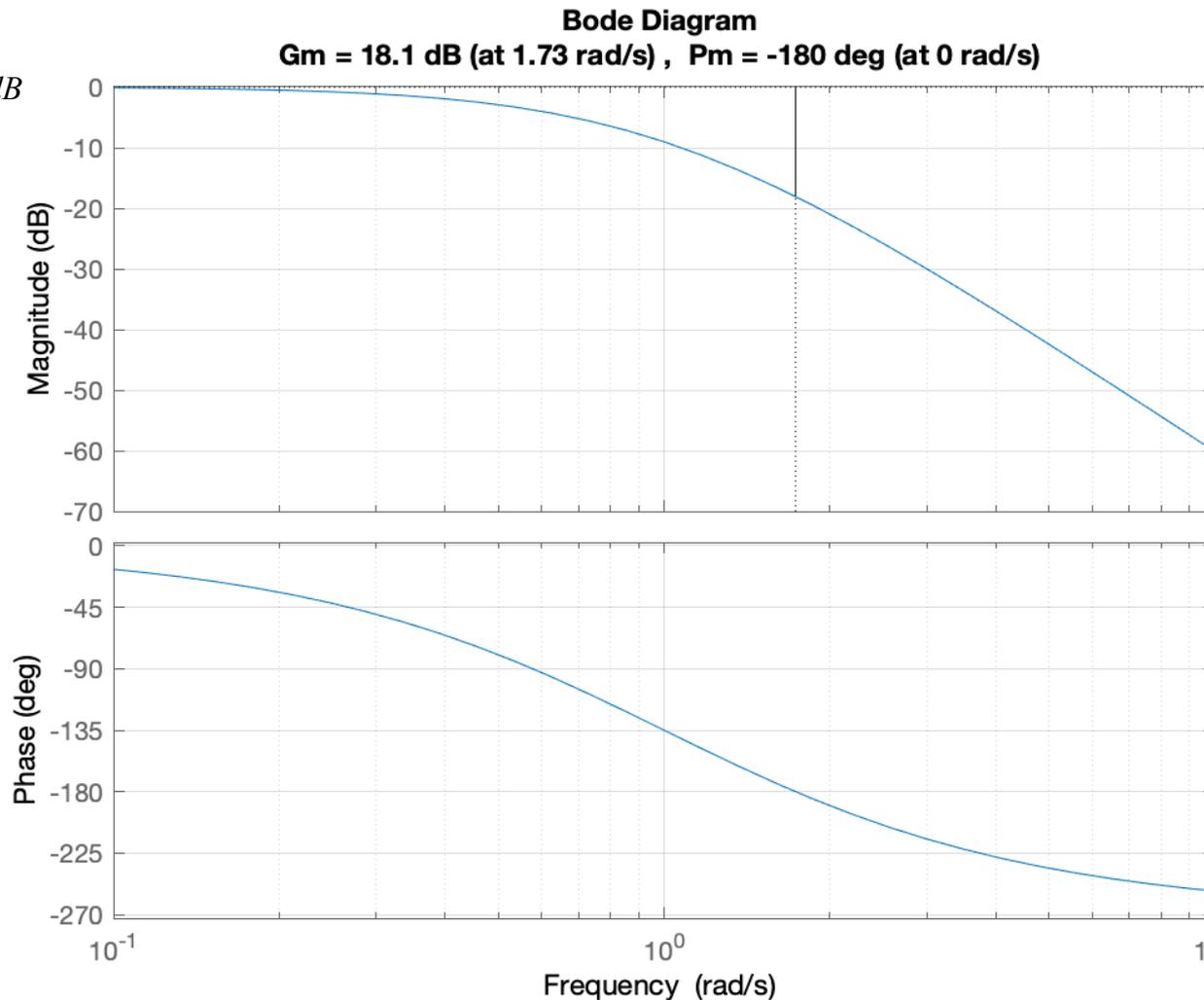
# STIMA DEL MARGINE DI GUADAGNO

*La valutazione del Margine di Guadagno puo' essere ottenuta direttamente dai diagrammi di Bode di  $L(s)$ , tenendo conto che*

$$|k_m|_{dB} = -|L(j\omega_\pi)|_{dB}$$

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$



# MARGINE DI FASE

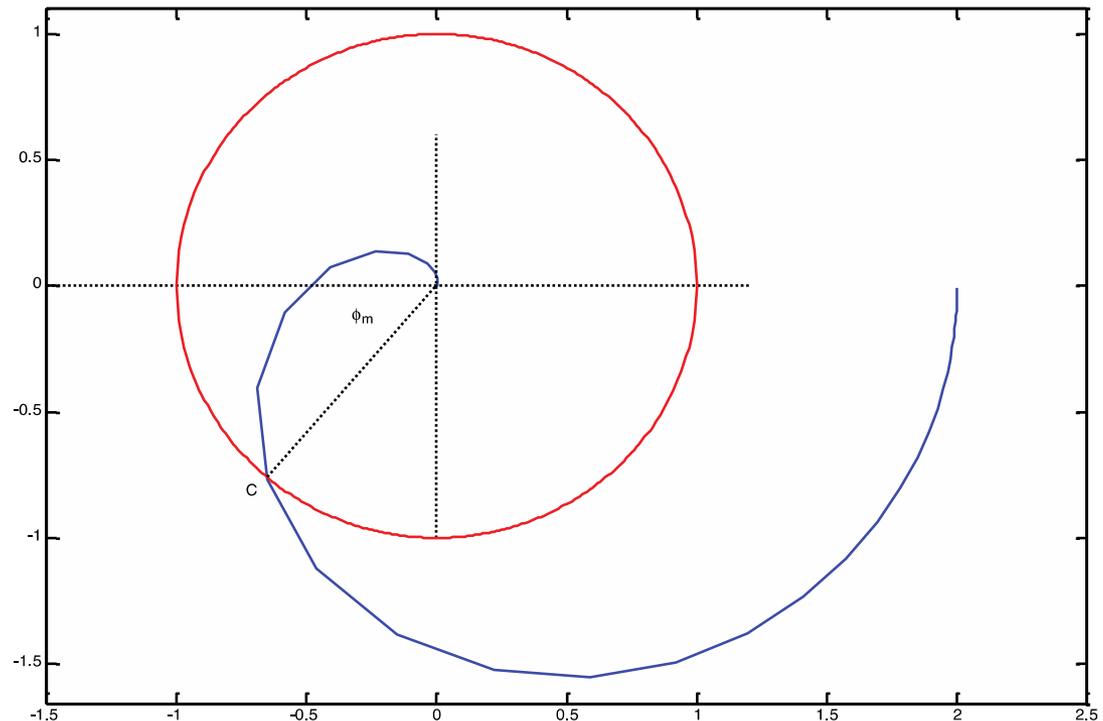
Si supponga che la funzione di trasferimento di anello  $L(s)$  abbia guadagno positivo e non possieda poli a parte reale maggiore di zero ( $P=0$ ).

Si supponga che  $\exists \omega_c : |L(j\omega_c)| = 1$

Indicando con  $C$  il punto di intersezione con il cerchio di raggio unitario, si definisce la corrispondente  $\omega_c$ , pulsazione critica e  $\Phi_c = \arg(L(j\omega_c))$  fase critica

Si definisce margine di fase

$$\phi_m = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$$



# MARGINE DI FASE

---

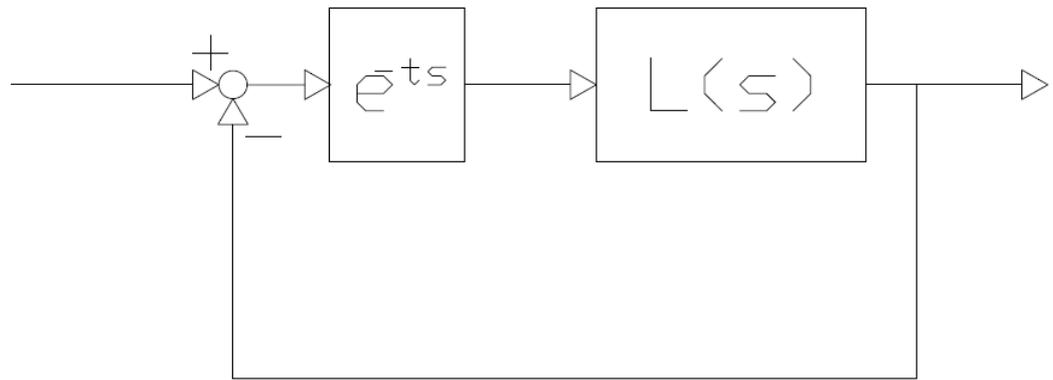
Per ricavare una interpretazione fisica del parametro Margine di Fase si consideri il seguente schema di controllo a ciclo chiuso supposto asintoticamente stabile

$$\phi_m \geq 0$$

$$\langle e^{-j\omega_c t} \rangle = -\omega_c t$$

$$180 + \phi_c - \omega_c t \geq 0$$

$$\phi_m - \omega_c t \geq 0$$



*Il ciclo chiuso è asintoticamente stabile per tutti i valori di  $t$  tale che*

$$t < \frac{\phi_m}{\omega_c}$$

*$\phi_m$  fornisce una misura del grado di robustezza della stabilità a fronte di possibili incertezze sulla fase della funzione di anello*

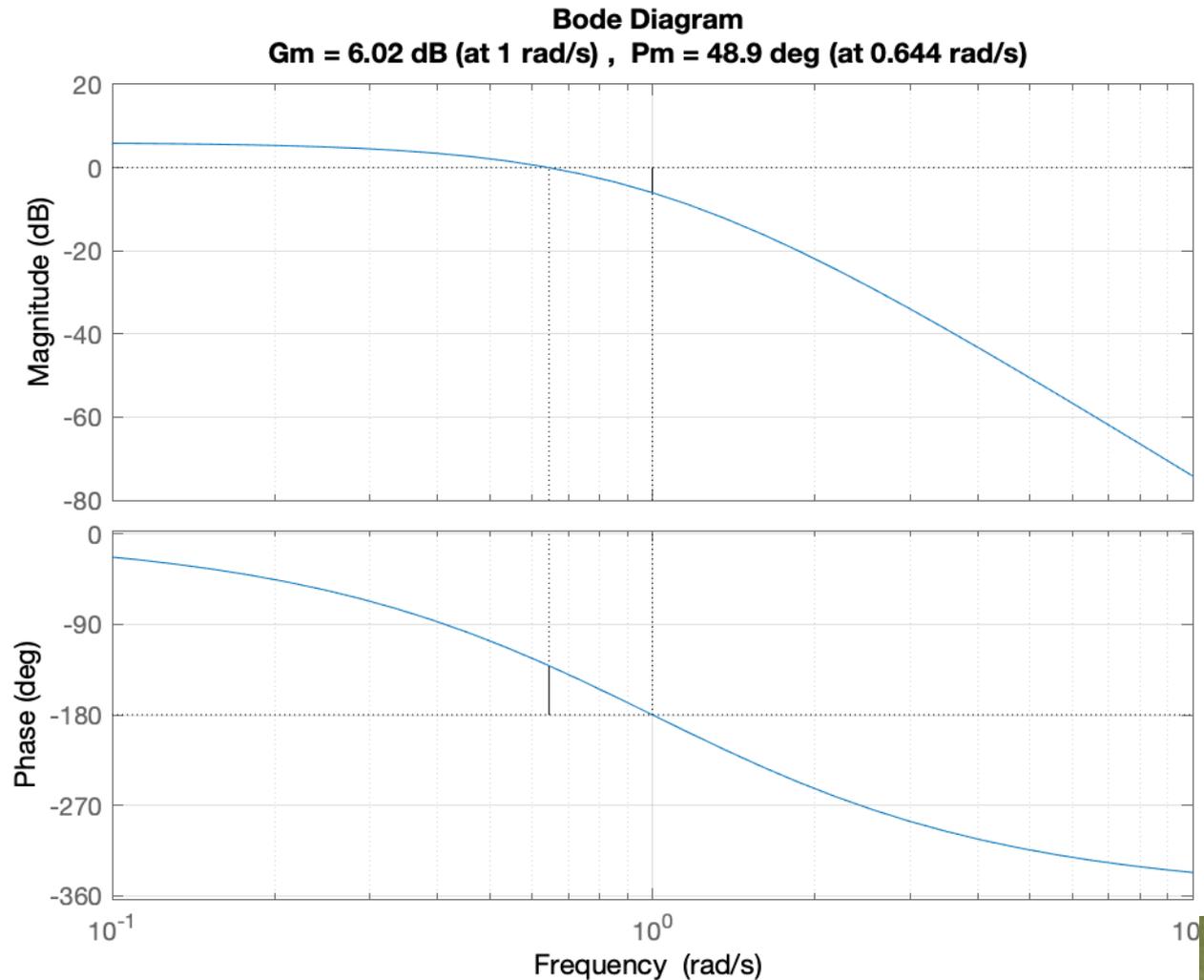
# STIMA DEL MARGINE DI FASE

La valutazione del Margine di Fase puo' essere ottenuta direttamente dai diagrammi di Bode di  $L(s)$

$$\phi_m = 180 + \phi_c$$

Esempio

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^4}$$



# CRITERIO DI BODE

---

Per verificare l'asintotica stabilità del sistema retroazionato mediante il criterio di Nyquist è necessario tracciare il diagramma di Nyquist della funzione di anello  $L(s)$  e determinare il numero di giri che esso effettua intorno al punto  $-1$ . Quando però  $L(s)$  non possiede poli a parte reale positiva ( $P=0$ ) la condizione espressa dal criterio è verificata se il punto critico  $-1$  non ha curve che lo circondano

Tale condizione può essere verificata attraverso procedimento che non richiedono il tracciamento del diagramma di Nyquist, ma si basano sull'analisi dei diagrammi di Bode.

## Teor. (criterio di Bode)

*Si consideri il solito schema di controllo a ciclo chiuso. Si supponga che*

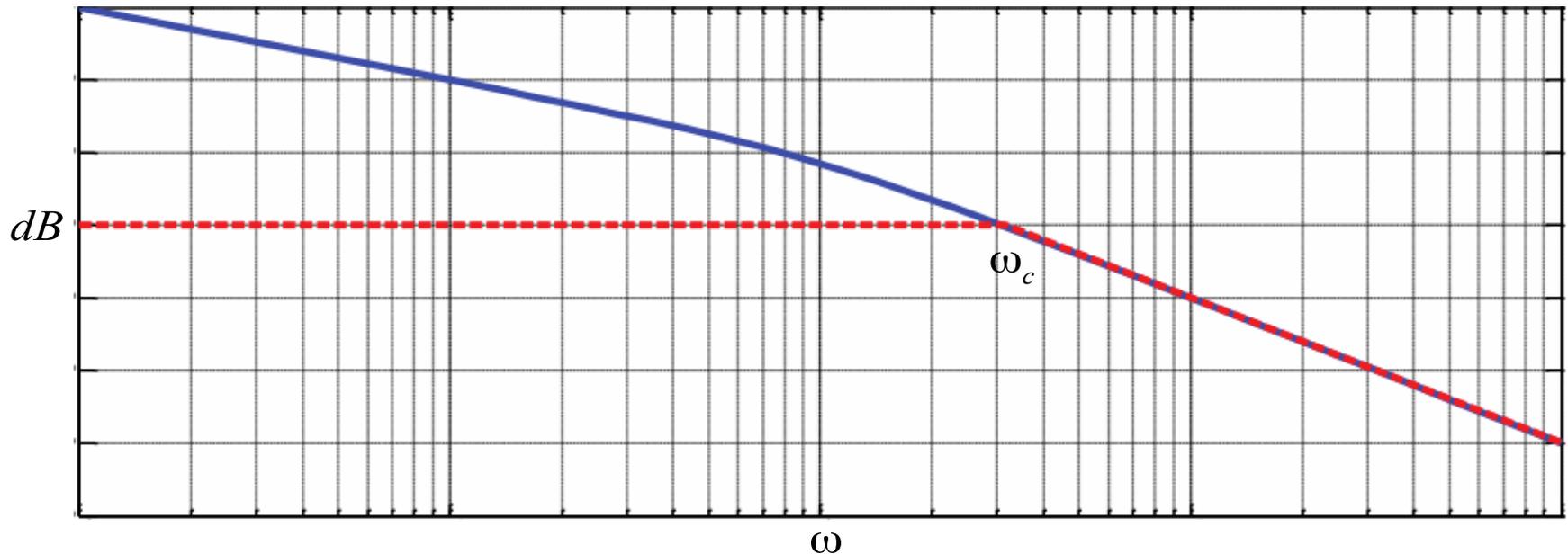
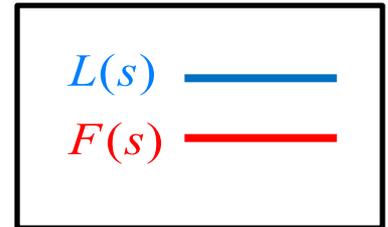
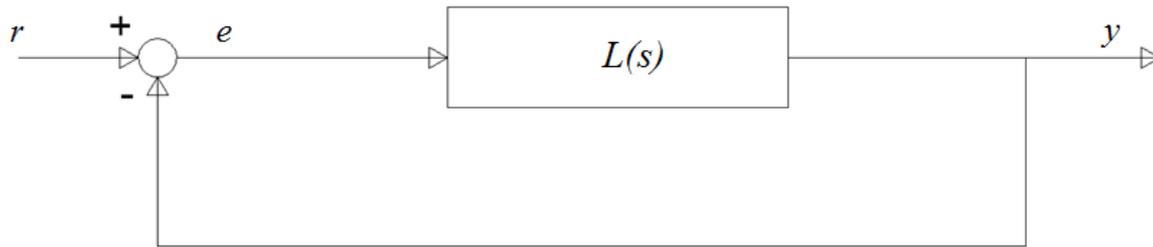
- 1.  $L(s)$  non abbia poli a parte reale positiva ( $P=0$ )*
- 2. Il diagramma di bode del modulo di  $L(s)$  attraversi una sola volta l'asse a 0 dB*

*Indicando con  $\mu$  il guadagno di  $L(s)$  e con  $\Phi_m$  il margine di fase, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema sia asintoticamente stabile è che risulti  $\mu > 0$  e  $\Phi_m > 0^\circ$*

# FUNZIONI DI SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

---

Si consideri , in accordo con le condizioni di applicabilità del criterio di Bode, che  $L(s)$  non abbia poli a parte reale positiva e che il diagramma di Bode dei moduli di  $L(j\omega)$  presenti un solo attraversamento dell'asse a 0 dB

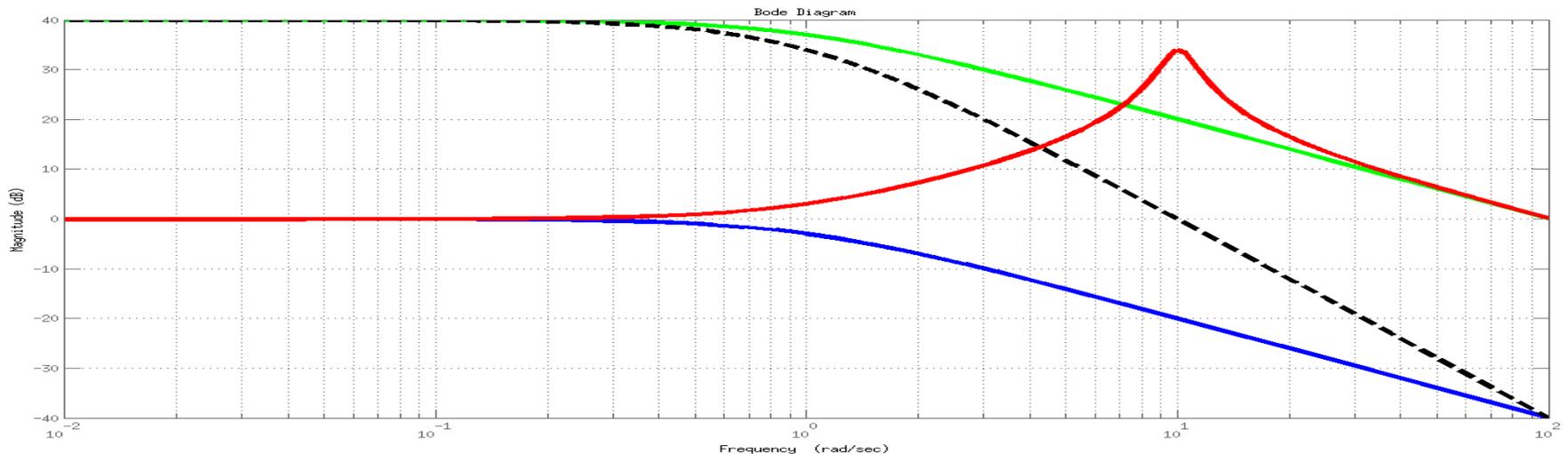


# MODERAZIONE VARIABILE DI CONTROLLO

La funzione di trasferimento che lega r-u è la Funzione di Sensività del controllo

$$Q(s) = \frac{C(s)}{1 + L(s)}$$

- Sotto le ipotesi che  $C(s)$  (verde) e  $G(s)$  (blu) siano di tipo passa basso, il diagramma dei moduli di  $Q(s)$  è quello in rosso
- Fissato  $G(s)$ , tanto più è elevata la banda passante di  $L(s)$  (nero), tanto peggiore è la moderazione della variabile di controllo intorno ad  $\omega_c$

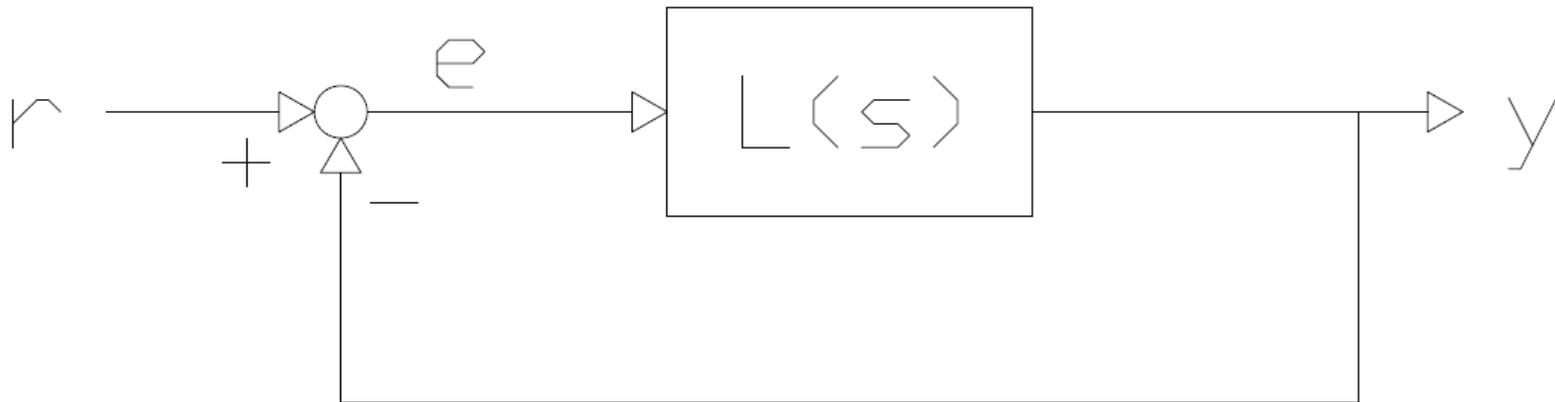


# PRESTAZIONI STATICHE

---

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione un dato di specifica di notevole importanza è l'errore a regime nella risposta a segnali di tipo polinomiale (gradino, rampa, parabola, etc)

Si faccia riferimento allo schema di controllo in retroazione a guadagno unitario mostrato in figura



L'andamento nel tempo della variabile errore  $e(t)$  in funzione dell'ingresso  $r(t)$ , si ottiene anti-trasformando l'espressione

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)} R(s)$$

# PRESTAZIONI STATICHE

Poiché interessa l'andamento asintotico della variabile errore per  $t$  tendente all'infinito, si applicherà il teorema del valore finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s)$$

	$R_0 \cdot 1(t)$	$R_0 \cdot t \cdot 1(t)$	$R_0 \cdot t^2 \cdot 1(t)$
$g=0$	$R_0/(1+\mu)$	Non Limitato	Non Limitato
$g=1$	0	$R_0/\mu$	Non Limitato
$g=2$	0	0	$R_0/\mu$
$g=3$	0	0	0

Errore a regime in caso di riferimento di tipo polinomiale

$$r(t) = R_0 t^{n-1} \cdot 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{R_0}{s^n}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + L(s)} \frac{R_0}{s^n}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu}{s^g}} \frac{R_0}{s^n} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-n+1}}{s^g + \mu} R_0$$

# PRESTAZIONI STATICHE

Caso I. Errore a regime in caso di riferimento di tipo gradino.

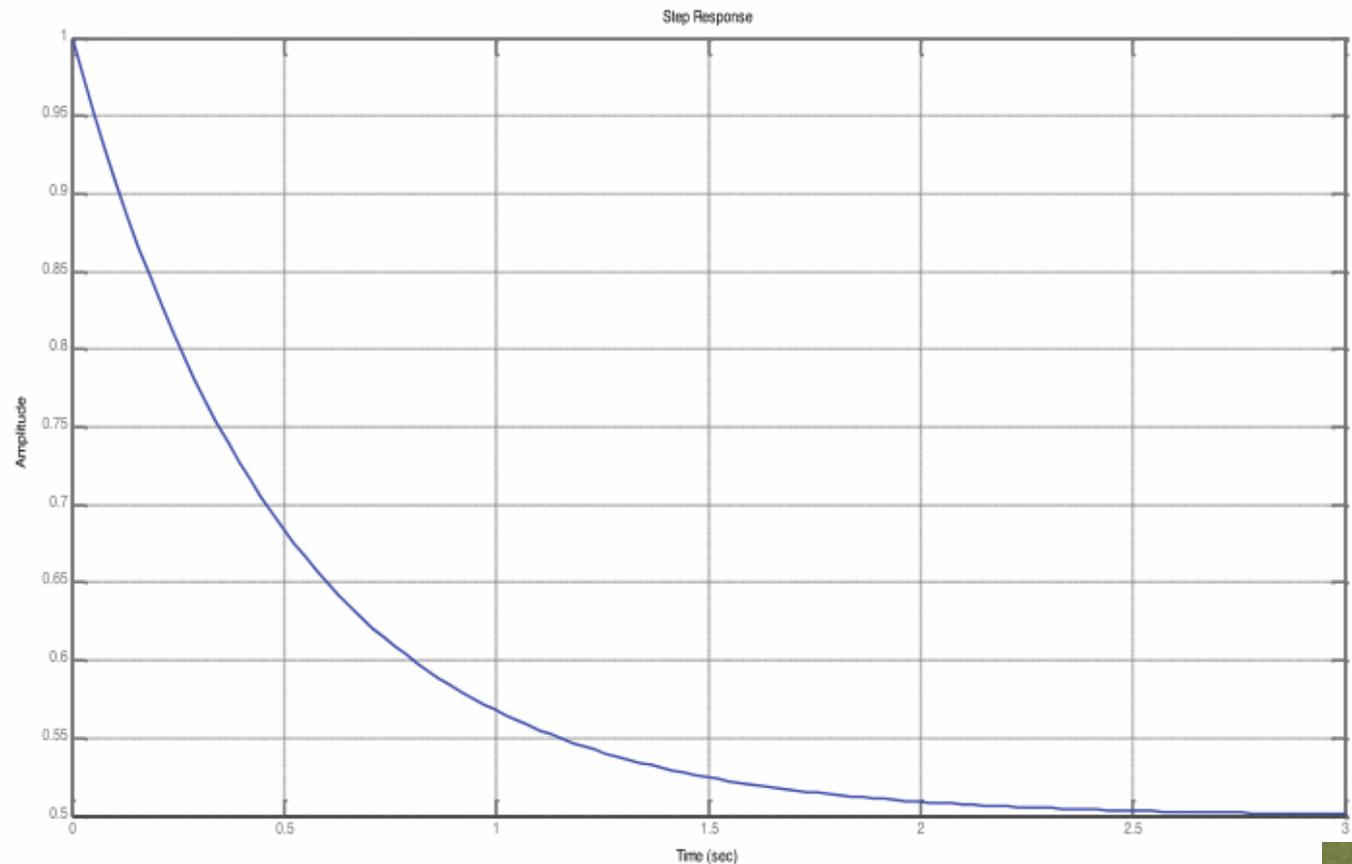
$$g = 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} R_0 = \frac{R_0}{1 + \mu}$$

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{(s + 1)}$$

$$R_0 = 1$$

$$\mu = 1$$



# PRESTAZIONI STATICHE

---

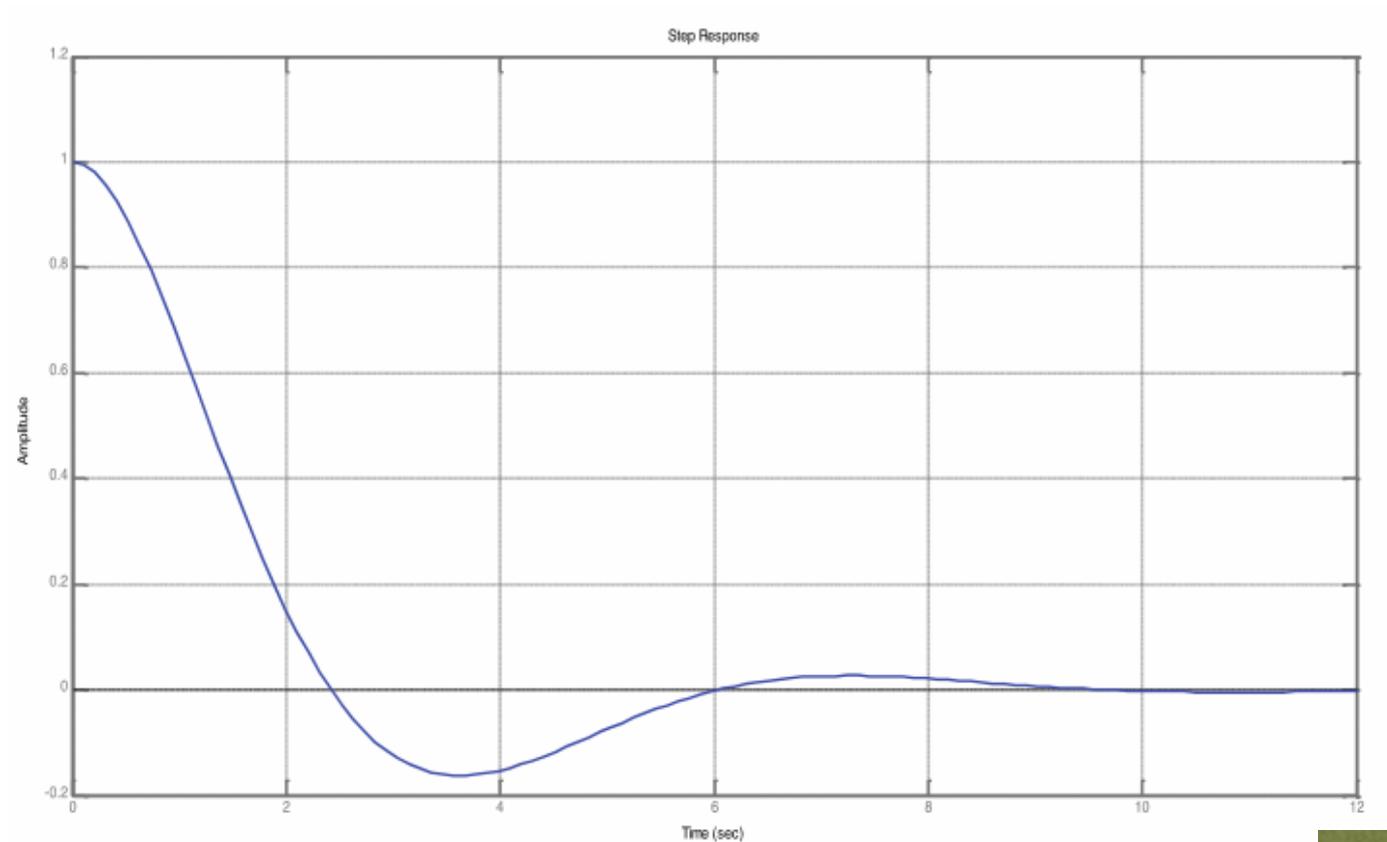
Caso I. Errore a regime in caso di riferimento di tipo gradino.

$$g > 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{s^g + \mu} R_0 = 0$$

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



# PRESTAZIONI STATICHE

---

Caso II. Errore a regime in caso di riferimento di tipo rampa.

$$g = 1$$

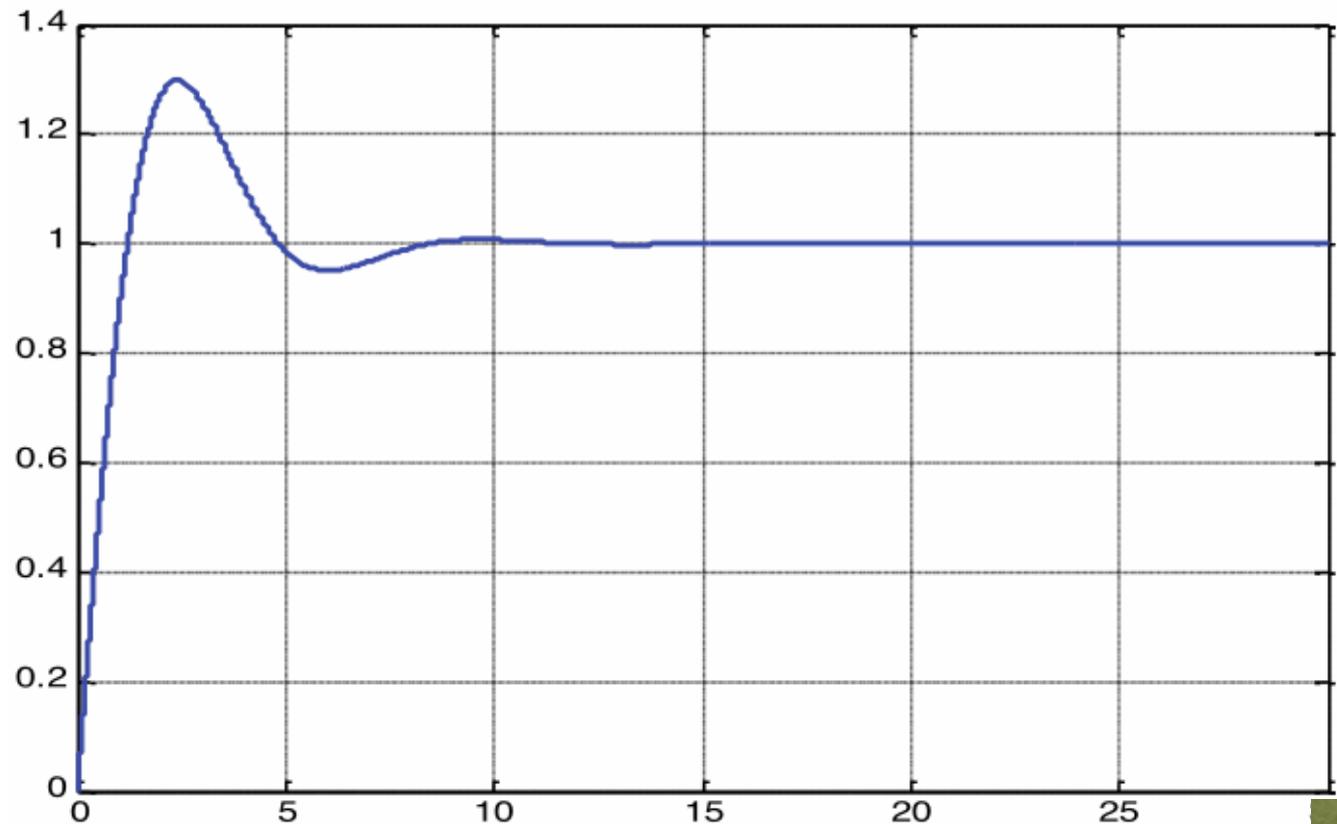
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} R_0 = \frac{R_0}{\mu}$$

Esempio

$$L(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$R_0 = 1$$

$$\mu = 1$$



# PRESTAZIONI STATICHE

---

Caso II. Errore a regime in caso di riferimento di tipo rampa.

$$g > 1$$

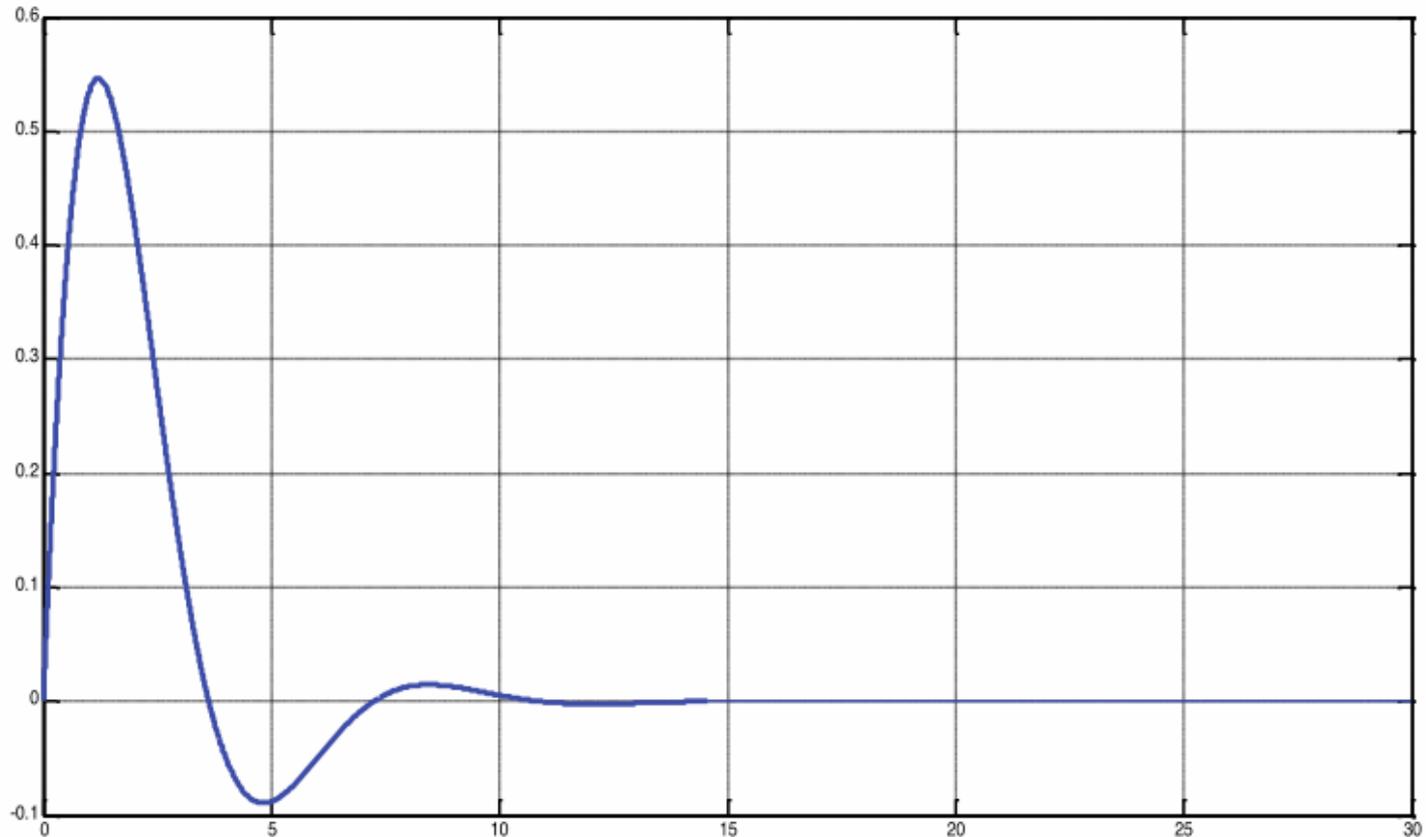
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-1}}{s^g + \mu} R_0 = 0$$

Esempio

$$L(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$R_0 = 1$$

$$\mu = 1$$



# PRESTAZIONI STATICHE

Caso III. Errore a regime in caso di riferimento di tipo parabola

$$g = 2$$

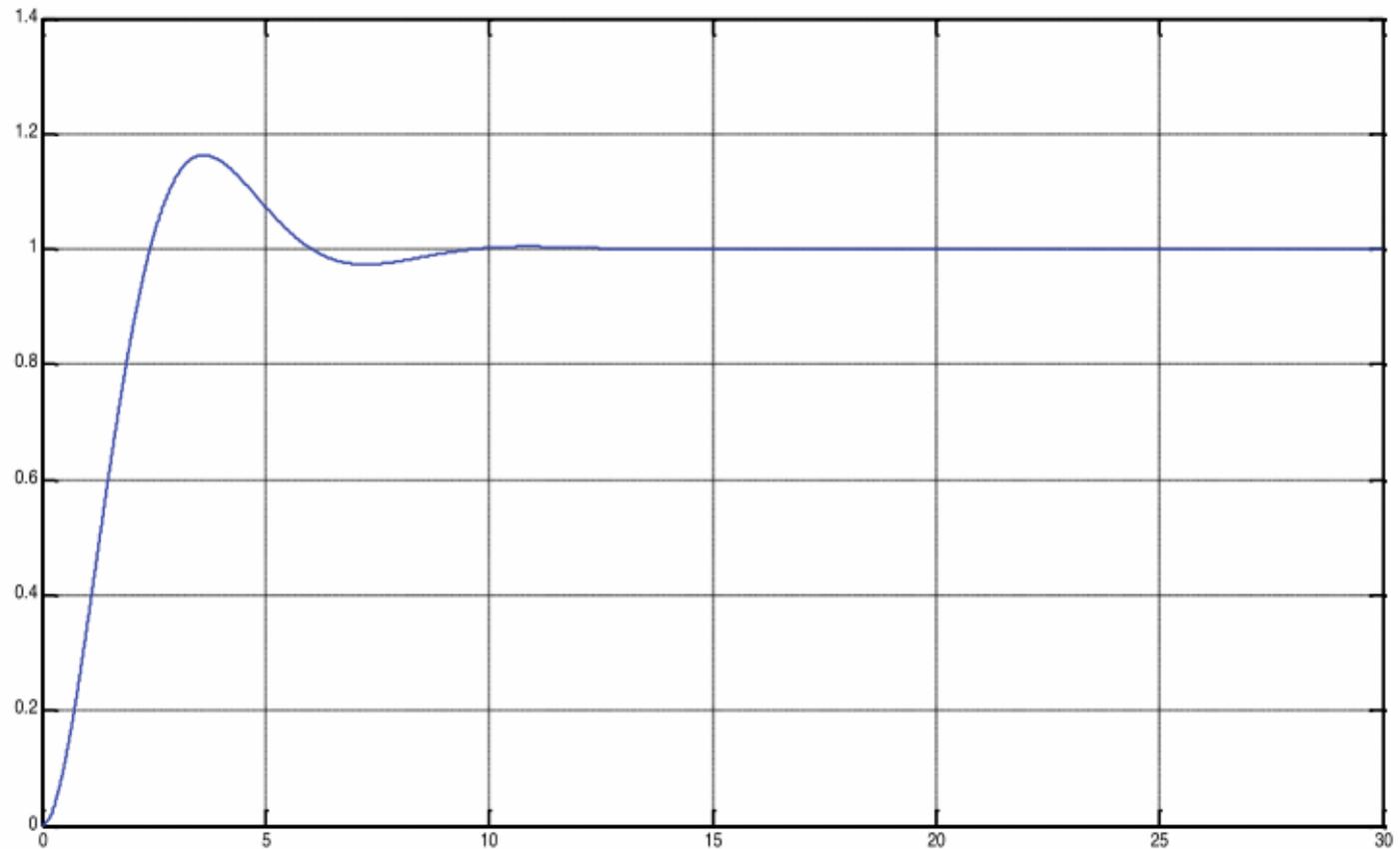
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-2}}{s^g + \mu} R_0 = \frac{R_0}{\mu}$$

Esempio

$$L(s) = \frac{s+1}{s^2}$$

$$R_0 = 1$$

$$\mu = 1$$



# PRESTAZIONI STATICHE

Caso III. Errore a regime in caso di riferimento di tipo parabola

$$g > 2$$

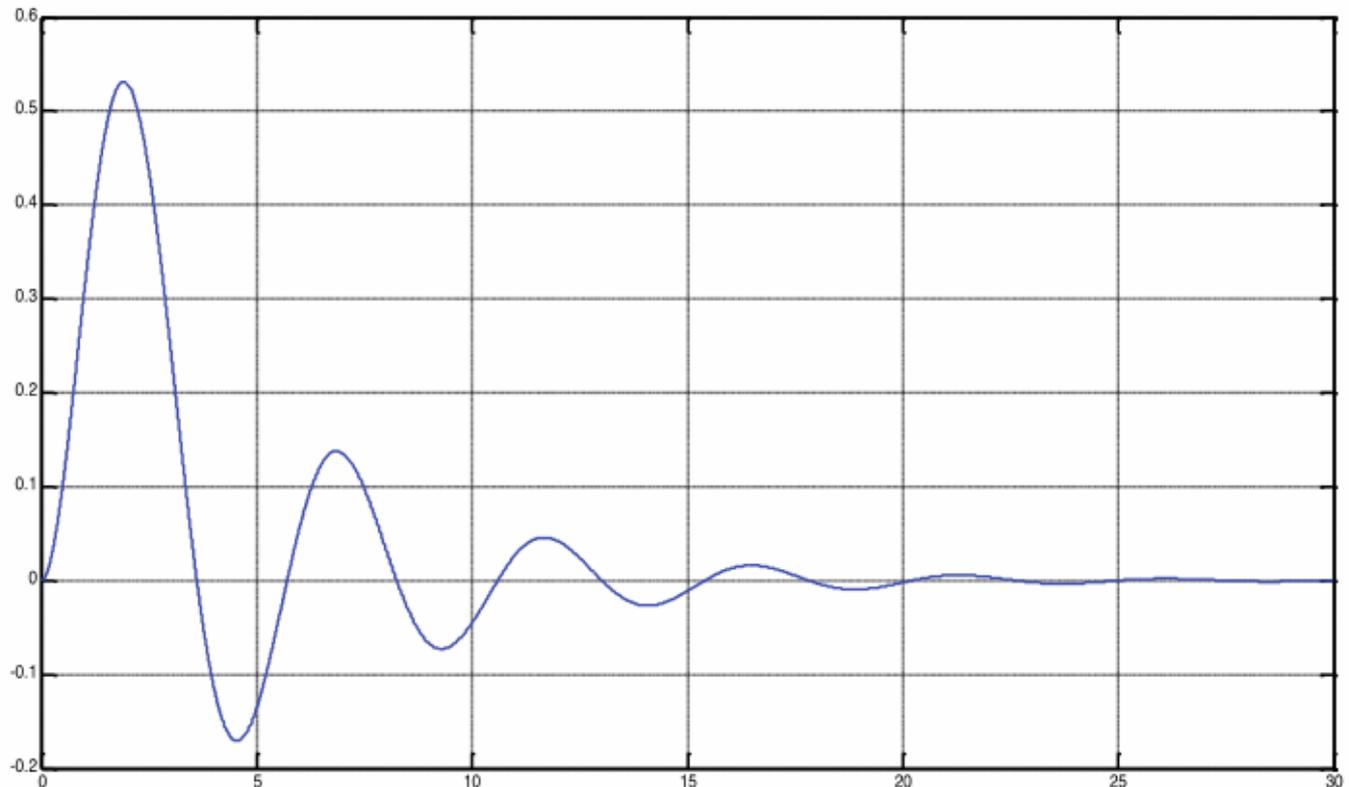
$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-2}}{s^g + \mu} R_0 = 0$$

Esempio

$$L(s) = \frac{(s+1)^2}{s^3}$$

$$R_0 = 1$$

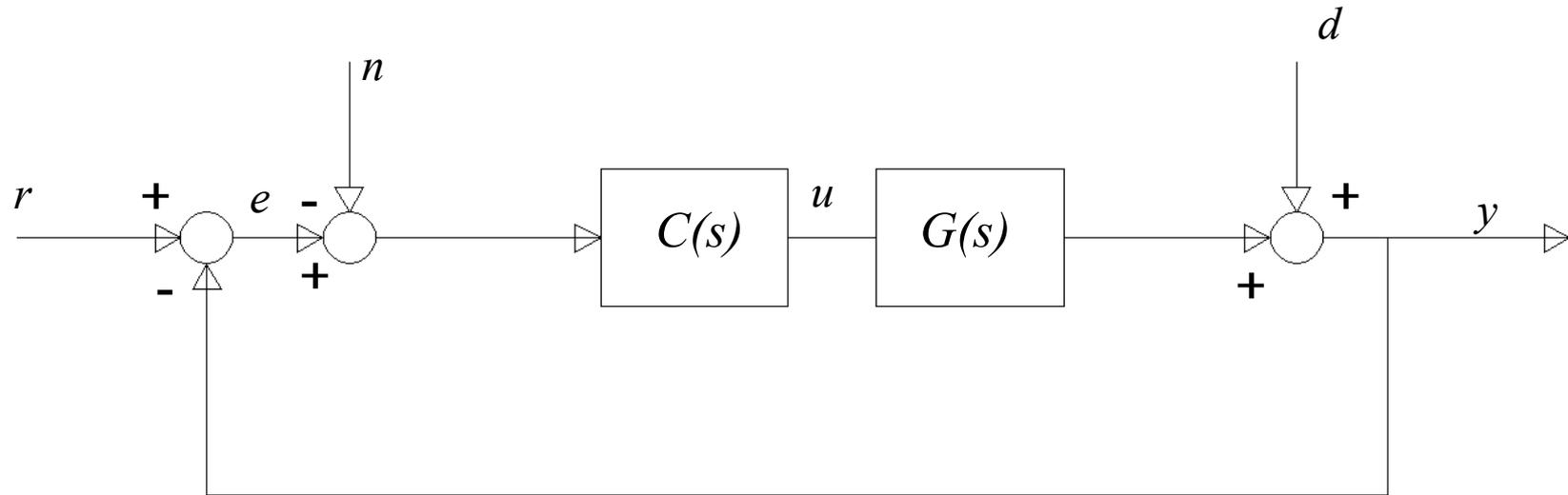
$$\mu = 1$$



# ESERCIZIO DI PROGETTO

---

Si consideri il classico schema di controllo di figura



Data la funzione di trasferimento  $G(s)$  progettare il regolatore  $C(s)$  che garantisca errore a regime nullo per un riferimento di tipo gradino  $1(t)$

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)^2}$$