RICHIAMI di
Teoria dei Sistemi

CLASSIFICAZIONE SISTEMI

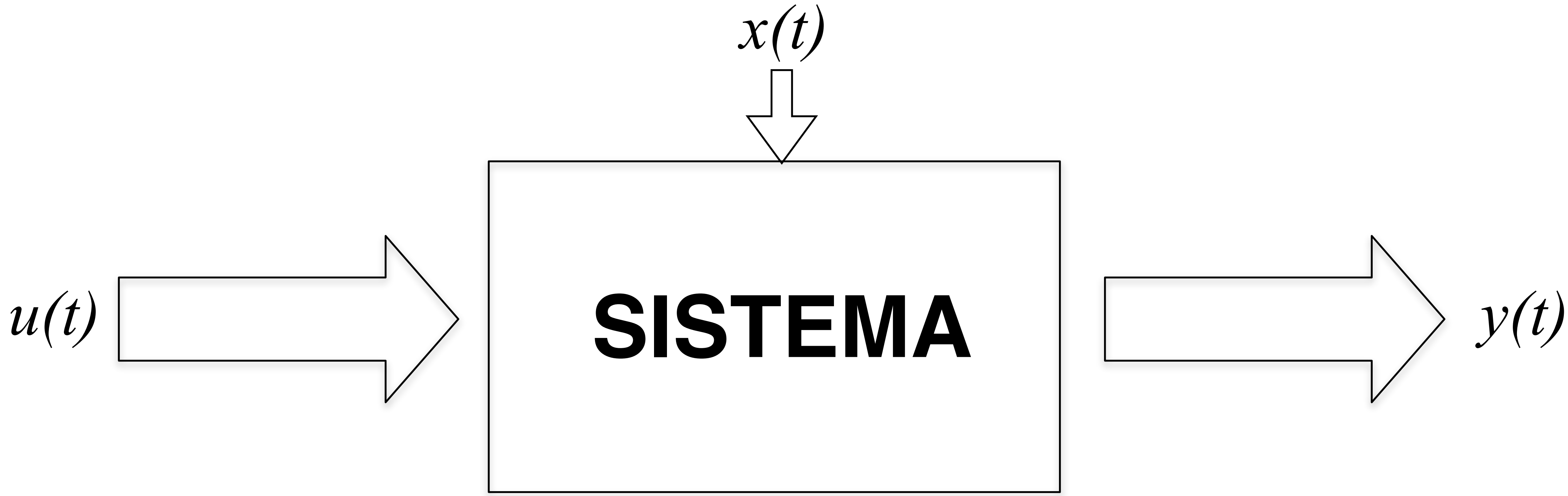
SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO

- ***Oggetto fisico che interagisce con il mondo esterno tramite due vettori di variabili u ed y che dipendono in maniera continua dal tempo t***

- ***u(t) è il vettore delle variabili di ingresso e rappresenta il mezzo attraverso cui il mondo esterno influenza il comportamento del sistema***

- ***y(t) è il vettore delle variabili di uscita e rappresenta il comportamento del sistema soggetto al forzamento u(t)***

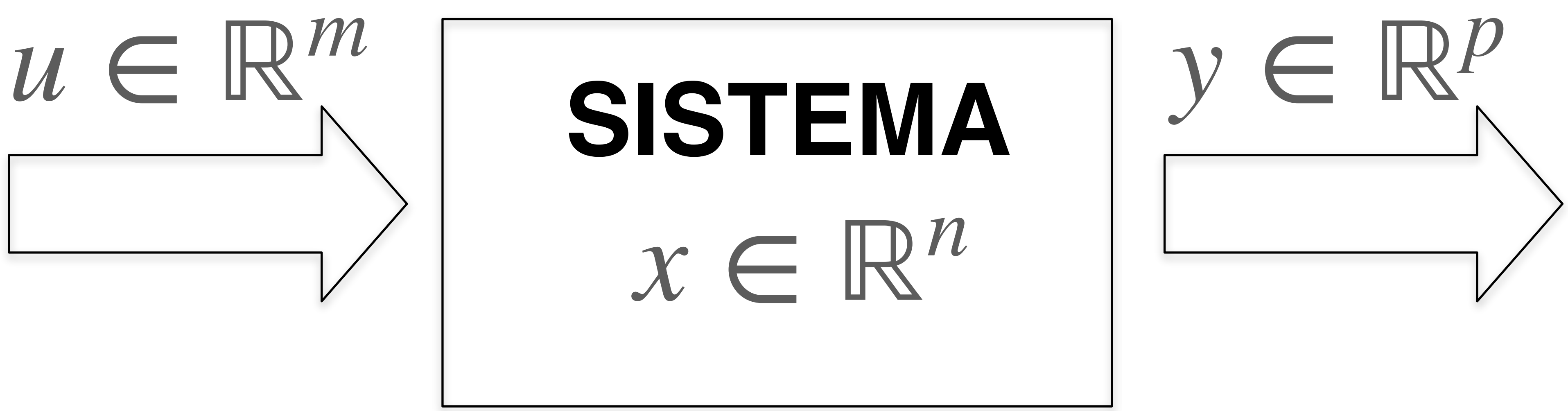
SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO



- ***x è detto vettore delle variabili di stato che descrivono la situazione interna del SISTEMA***

Rappresentazione ISU	$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ $y(t) = g(x(t), u(t), t)$	$x(t_0) = x_0$

SISTEMA DINAMICO A TEMPO CONTINUO



Rapp. ISU	$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ $y(t) = g(x(t), u(t), t)$	$x(t_0) = x_0$	(1)

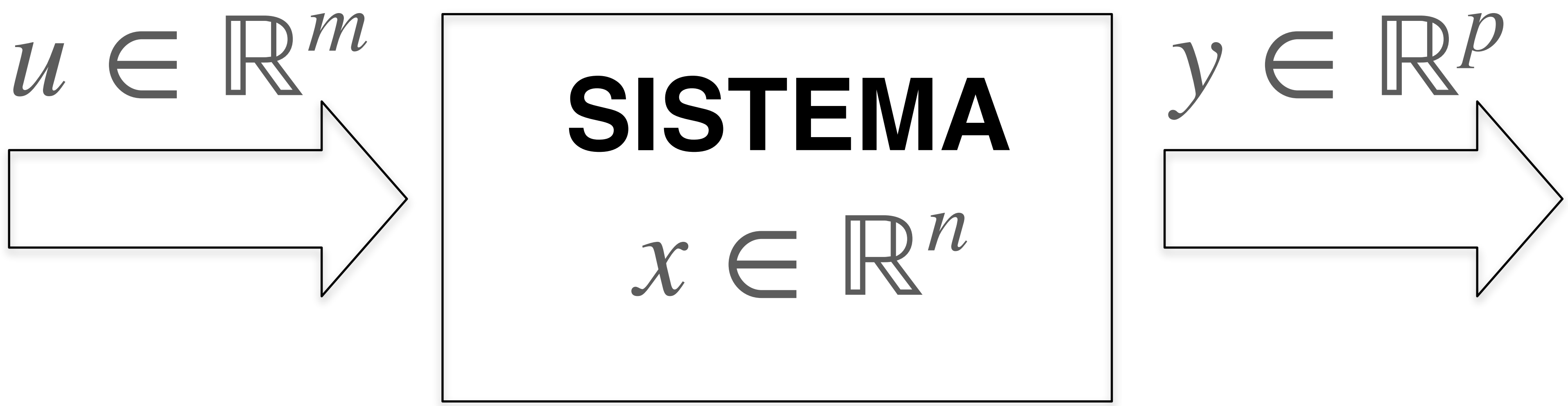
- Il vettore di equazione differenziale $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ è detto equazione di stato

- Il vettore di equazioni $y(t) = g(x(t), u(t), t)$ è detto equazione di uscita

CLASSIFICAZIONE

- Se $m=p=1$ il Sistema è detto Monovariabile o anche SISO
- Un Sistema che non è SISO è detto multivariabile o MIMO
- Se l'equazione di uscita non dipende dall'ingresso, il sistema è detto strettamente proprio.
- Se l'equazione di uscita dipende dall'ingresso, il sistema è detto proprio.
- Se l'equazione di uscita non dipende dallo stato, il sistema è detto algebrico o non dinamico.

CLASSIFICAZIONE

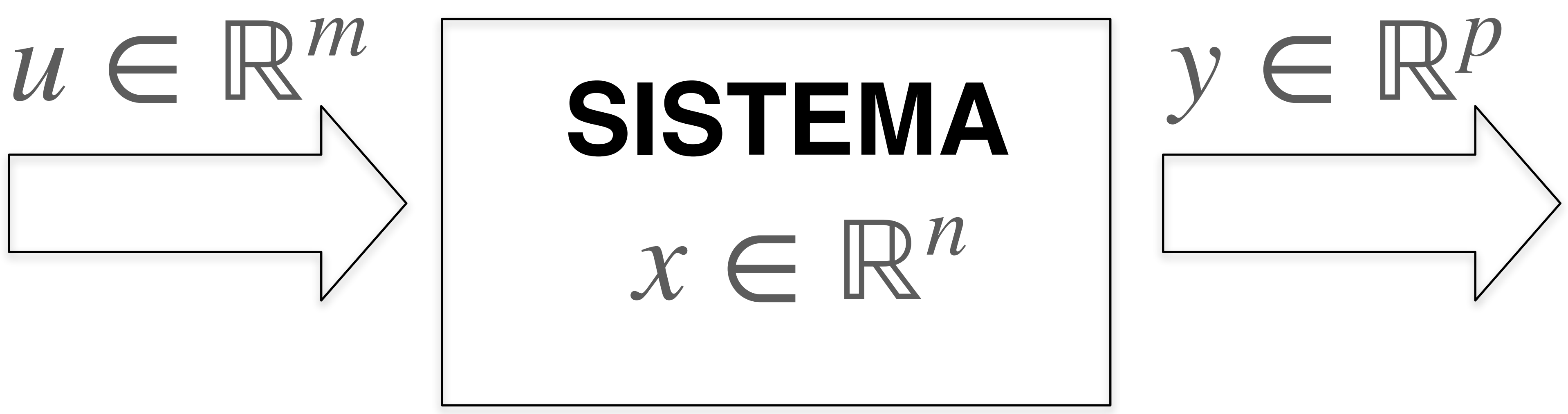


- Se la rappresentazione ISU ha la seguente struttura

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ y(t) &= g(x(t), u(t)) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

il Sistema è detto <u>Stazionario</u> o Tempo Invariante

CLASSIFICAZIONE

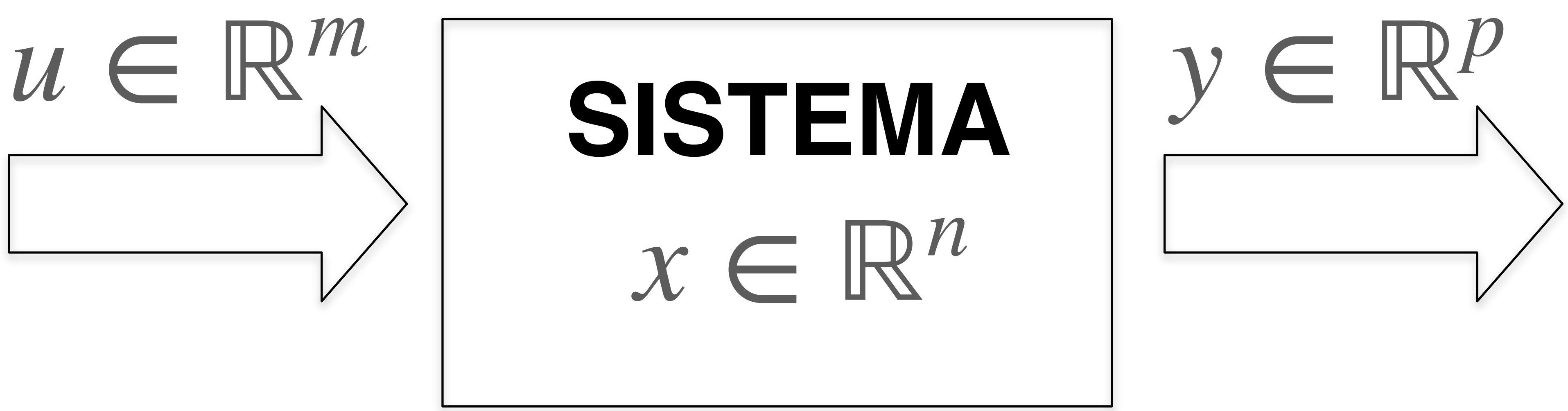


- Se le equazioni di stato e di uscita dipendono linearmente dallo stato x e dall'ingresso u , il Sistema è detto <u>Lineare</u>.

- La rappresentazione ISU di un sistema Lineare T.C ha la seguente forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (3)$$

CLASSIFICAZIONE



- Un Sistema Lineare e Tempo Invariante è detto LTI ed ha la seguente forma

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}
\qquad x(t_0) = x_0 \qquad (4)
$$

EQUILIBRIO, STABILITÀ E LINEARIZZAZIONE

DEFINIZIONE PUNTO DI EQUILIBRIO

- Si consideri il seguente sistema non-lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \qquad (1)$$

- La coppia $(\bar{x}, \bar{u})$ è detta **coppia (o punto) di equilibrio** se

$$\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases} \qquad (2)$$

con $\bar{y}$ costante detta **uscita di equilibrio**

CLASSIFICAZIONE PUNTO EQUILIBRIO

Punti di equilibrio stabili

Punti di equilibrio instabili

Insieme dei punti di equilibrio

STABILITÀ DEI SISTEMI LINEARI STAZIONARI

RISPOSTA SISTEMA LINEARE STAZIONARIO

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

PUNTO DI EQUILIBRIO

- Sia $(\bar{x}, \bar{u})$ un **punto di equilibrio**

.

$$\begin{cases} A \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{u} = 0 \\ \bar{y} = C \cdot \bar{x} + D \cdot \bar{u} \end{cases} \tag{3}$$

ANALISI STABILITA DEL PUNTO DI EQUILIBRIO

- Le caratteristiche di stabilità del punto di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ dipendono esclusivamente dalle proprietà dell'esponenziale di matrice e^{At}

- Dato il sistema (1), se $(\bar{x}, \bar{u})$ è un punto di equilibrio semplicemente stabile/asintoticamente stabile/instabile allora **tutti i punti di equilibrio avranno le stesse caratteristiche di stabilità**

ANALISI MODALE

- Sotto opportune condizioni è possibile affermare che la quantità $e^{A \cdot t} \cdot x_0$ può essere riscritta come C.L. dei termini $e^{s_i \cdot t}$ (detti modi) con $s_i \in \mathbb{C}$ autovalore di A e $i = 1 \cdots n$

$s_i \in \mathbb{R} \rightarrow e^{s_i \cdot t}$ $\quad$ $s_i = \sigma_i \pm j \cdot \omega_i \in \mathbb{C} \rightarrow e^{\sigma_i \cdot t} sin(\omega_i t + \phi_i)$

CARATTERIZZAZIONE STABILITA'

- Se i modi sono tutti **non divergenti** o **convergenti** la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **stabile**

- Tutti i modi sono **non divergenti** o **convergenti se e solo se** gli autovalori di A sono tutti a parte reale negativa o nulla

CARATTERIZZAZIONE ASINTOTICA STABILITA'

- Se i modi sono tutti **convergenti** la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **asintoticamente stabile**

- Tutti i modi sono convergenti se e solo se gli **autovalori di A sono tutti a parte reale negativa**

CARATTERIZZAZIONE INSTABILITA'

- Se esiste almeno un modo divergente la condizione di equilibrio $(\bar{x}, \bar{u})$ è di tipo **instabile**

- Esiste un modo divergente se e solo se **la matrice A possiede almeno un autovalore parte reale positiva**

APPLICAZIONI TRASFORMATA DI LAPLACE

IL CALCOLO DELLA RISPOSTA

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

Trasformata Laplace

$$X(s) = \Phi(s)x(0) + H(s)U(s)$$
$$Y(s) = \Psi(s)x(0) + W(s)U(s)$$

Anti-Trasformata Laplace

$$x(t) = e^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t e^{A\cdot(t-\tau)}B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$
$$y(t) = Ce^{A\cdot t}x_0 + \int_0^t Ce^{A\cdot(t-\tau)}Bu(\tau) \cdot d\tau + Du(t)$$

1. ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI
2. PASSAGGIO IU–ISU

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il seguente sistema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \qquad (1)$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (s \cdot I - A)^{-1} B U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s) x(0) + H(s) U(s) \qquad (2)$$

$$Y(s) = C(s \cdot I - A)^{-1} x(0) + (C(s \cdot I - A)^{-1} B + D) \cdot U(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s) x(0) + W(s) U(s) \qquad (3)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il ... tema lineare stazionario

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdots \\ y(t) = C \cdots \end{cases} \quad \cdots 0) = x_0 \qquad (1)$$

Evoluzione libera nello stato

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = \boxed{(s \cdot I - A)^{-1}x(0)} + (s \cdot I - A)^{-1}BU(s) = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s)x(0) \cdots \qquad (2)$$

$$Y(s) = \boxed{C(s \cdot I - A)^{-1}x(0)} + \cdots) = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s)x(0) \cdots \qquad (3)$$

Evoluzione libera nell'uscita

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

- Si consideri il … ma lineare stazionario

Evoluzione

<u>forzata</u> nello

stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot \ldots \quad \ldots) = x_0 \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad (1)$$

- Applico operatore trasformata ed ottengo

.

$$X(s) = (s \cdot I - A)^{-1}x(0) + \boxed{(s \cdot I - A)^{-1}BU(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Phi(s)x(0) + H(s)U(s) \quad (2)$$

Evoluzione

<u>forzata</u>

nell'uscita

$$Y \ldots) + \boxed{(C(s \cdot I - A)^{-1}B + D) \cdot U(s)} = \cdots$$

$$\cdots = \Psi(s)x(0) + W(s)U(s) \quad (3)$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

.

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D \qquad (4)$$

- E' detta matrice di trasferimento o rappresentazione IU
- Rappresenta nel dominio di Laplace il legame tra l'ingresso u e l'uscita y

$$Y(s) = W(s) \cdot U(s)$$

- Nel caso di sistemi SISO, è una funzione razionale fratta

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n} \qquad (5)$$

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n}$$

- Le radici del polinomio al numeratore sono detti ZERI della funzione di trasferimento

- Le radici del polinomio al denominatore sono detti POLI della funzione di trasferimento

APPLICAZIONE TRASF. DI LAPLACE

.

- Il grado del numeratore sarà sempre minore o uguale al grado del denominatore (sistema causale).
- Il grado del numeratore è pari al quello del denominatore $b_0 \neq 0$ se e solo se la matrice $D \neq 0$ (**sistema proprio**)
- Una f.d.t con grado del numeratore minore del grado del denominatore identifica un sistema **strettamente proprio** (D=0)

RELAZIONE TRA POLI E AUTOVALORI MATRICE A

➤ Confrontando (4) e (5) si ottiene la (6)

$$W(s) = C(s \cdot I - A)^{-1}B + D = C\frac{adj(s \cdot I - A)}{|s \cdot I - A|}B + D = \cdots$$

.

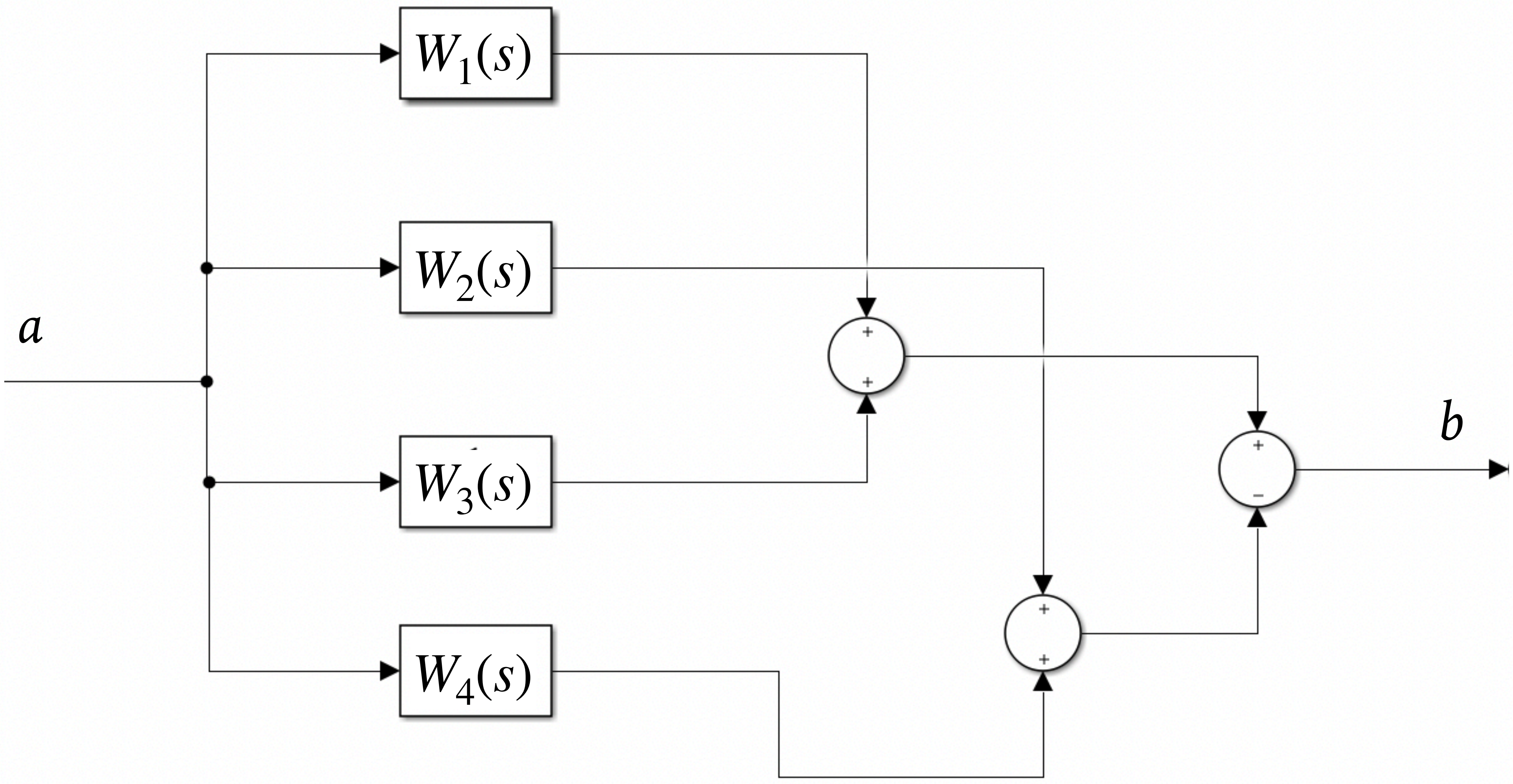
$$\cdots = \frac{C \cdot adj(s \cdot I - A) \cdot B + D \cdot |s \cdot I - A|}{|s \cdot I - A|}$$

$$|s \cdot I - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_n \quad (6)$$

➤ In assenza di cancellazioni POLO-ZERO, i POLI di W(s) coincidono con le radici del polinomio caratteristico di A .

ALGEBRA DEGLI SCHEMI A BLOCCHI

E' spesso utile saper calcolare, a partire da uno schema a blocchi, il legame tra due variabili

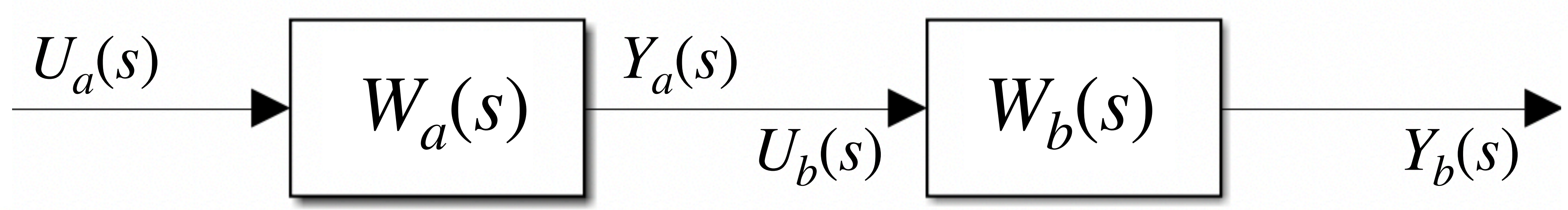


CONFIGURAZIONE SERIE

Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in <u>SERIE</u> quando l'uscita del primo $Y_a(s)$ coincide con ingresso del secondo $U_b(s)$



CONFIGURAZIONE SERIE

Il legame tra $U_a(s)$ e $Y_b(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s) = W_b(s) \cdot Y_a(s) = \cdots$$

$$\cdots = W_b(s) \cdot W_a(s) \cdot U_a(s)$$

$$W_{SERIE}(s) = W_b(s) \cdot W_a(s)$$

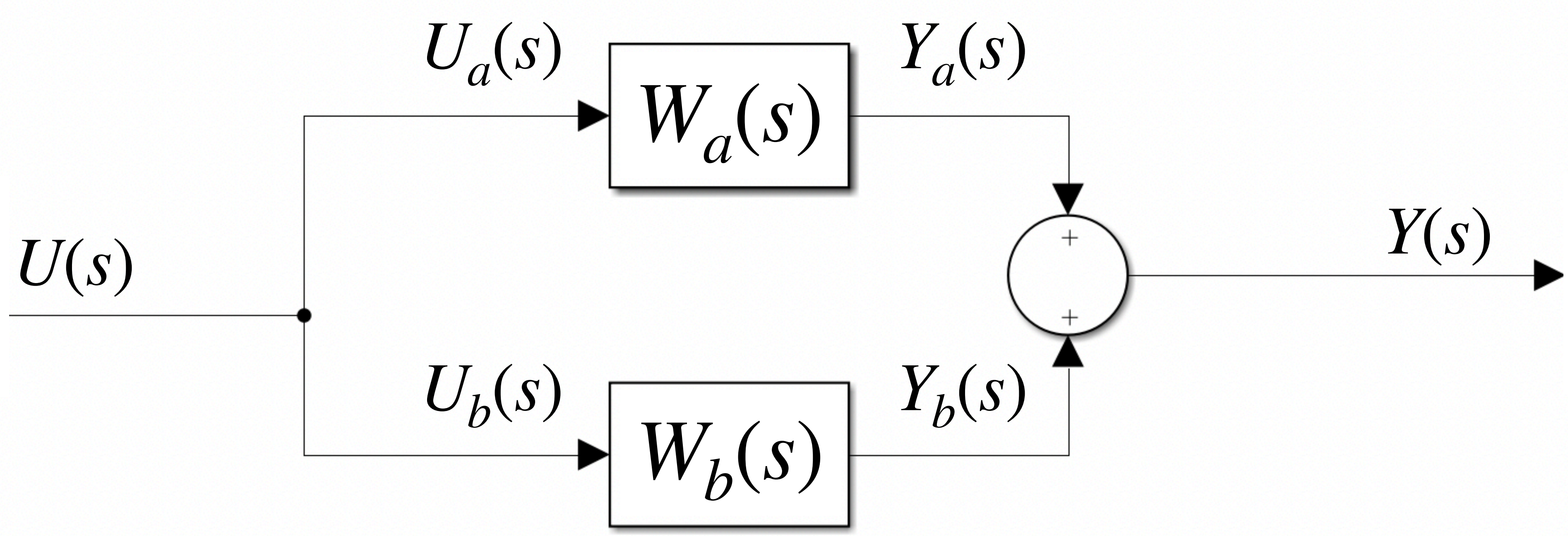
In assenza di cancellazioni Polo-Zero, la serie è **<u>Asintoticamente Stabile</u>** se e solo se lo sono i singoli sistemi

CONFIGURAZIONE PARALLELO

Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in <u>PARALLELO</u> se hanno lo stesso ingresso mentre le uscite si sommano



CONFIGURAZIONE PARALLELO

Il legame tra $U(s)$ e $Y(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s) = W_a(s) \cdot U(s) + W_b(s) \cdot U(s) = \cdots$$

$$\cdots = (W_a(s) + W_b(s)) \cdot U(s)$$

$$W_{PARALLELO}(s) = W_a(s) + W_b(s)$$

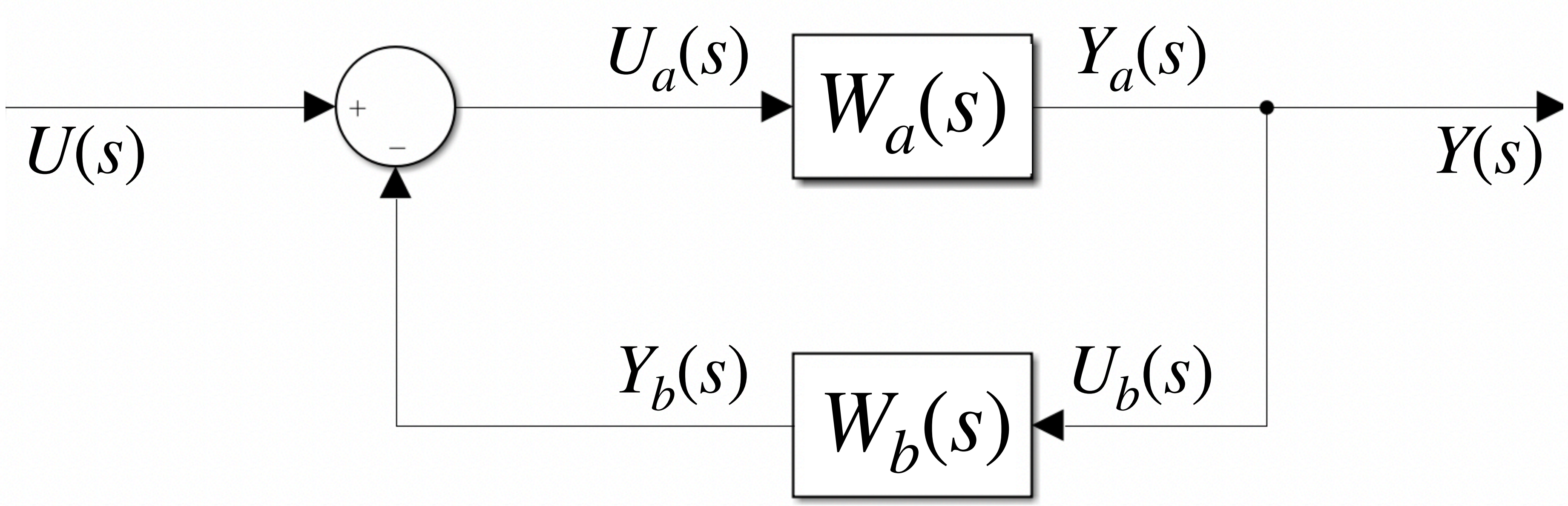
In assenza di cancellazioni Polo-Zero, il parallelo è **Asintoticamente Stabile** se e solo se lo sono i singoli sistemi

CONFIGURAZIONE RETROAZIONE

Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s)$$
$$Y_b(s) = W_b(s) \cdot U_b(s)$$

si dicono interconnessi in <u>RETROAZIONE</u> se costituiscono un anello chiuso come indicato in figura



CONFIGURAZIONE RETROAZIONE

Il legame tra $U(s)$ e $Y(s)$ può essere rappresentato attraverso la seguente relazione algebrica

$$Y(s) = Y_a(s) = W_a(s) \cdot U_a(s) = W_a(s) \cdot (U(s) - Y_b(s)) = \cdots$$
$$\cdots = W_a(s) \cdot (U(s) - W_b(s) \cdot Y_a(s))$$

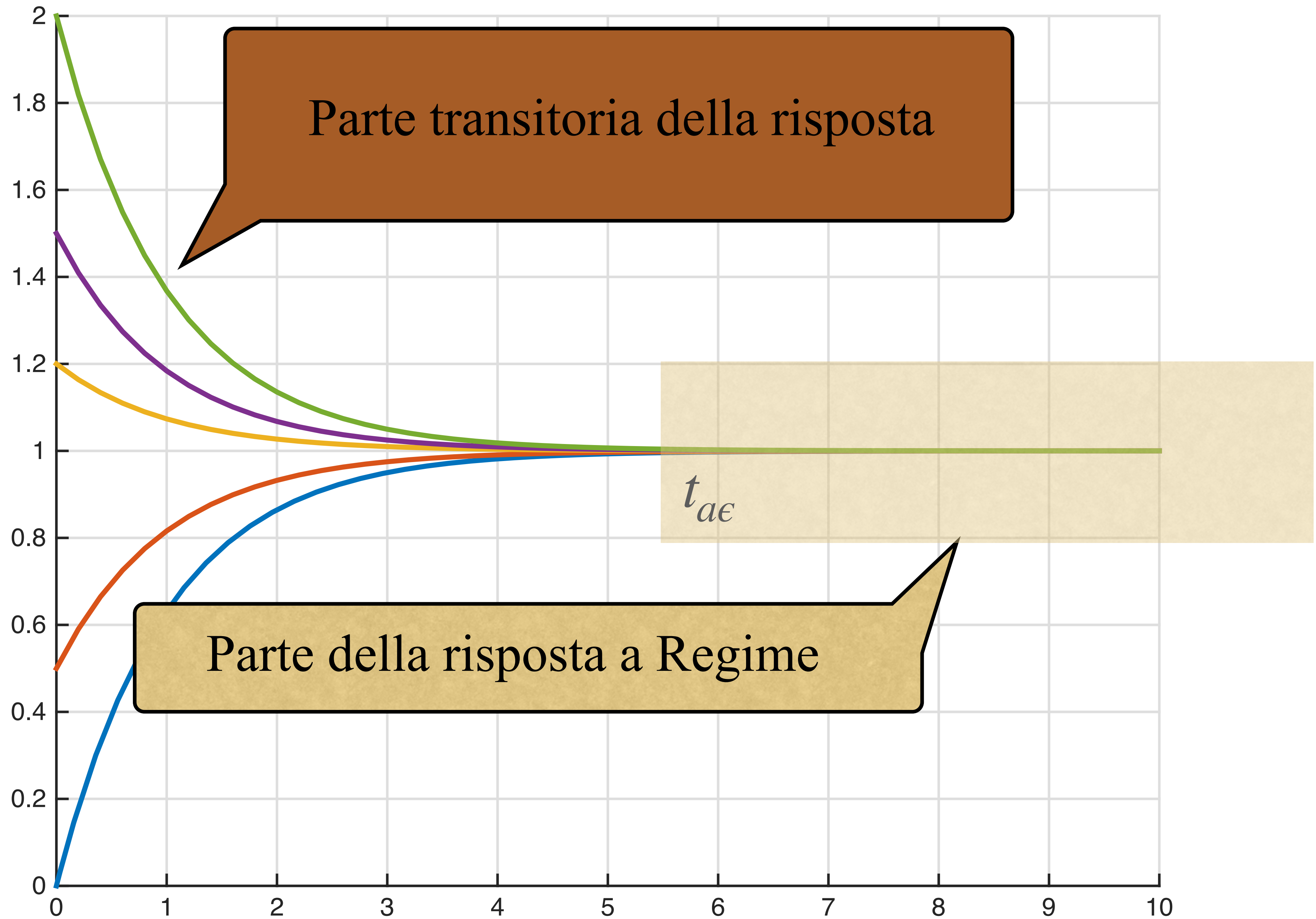
$$W(s) = \frac{W_a(s)}{1 + W_a(s) \cdot W_b(s)}$$

~~In assenza di cancellazioni Polo-Zero, la retroazione è **Asintoticamente Stabile** se e solo se lo sono i singoli sistemi~~

1. RISPOSTA A REGIME

2. TEMPO DI ASSESTAMENTO

TENSIONE AI CAPI DEL CONDENSATORE AL VARIARE DELLA TENSIONE INIZIALE



RISPOSTA A REGIME

- Si consideri un Sistema Lineare Stazionario Asintoticamente Stabile.
- La risposta del sistema può essere decomposta temporalmente in Transitoria e a Regime
- **La Risposta a Regime** è la porzione di risposta che si ottiene a transitorio esaurito (non dipende dalla condizione iniziale)

$$y_\infty(t) = \lim_{t_0 \to -\infty} \int_{t_0}^{t} W(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- Il tempo necessario perché la risposta del sistema vada a regime è detto tempo di assestamento $t_{a\epsilon}$e dipende dalle caratteristiche del sistema

RISPOSTA A REGIME A SEGNALI NOTEVOLI

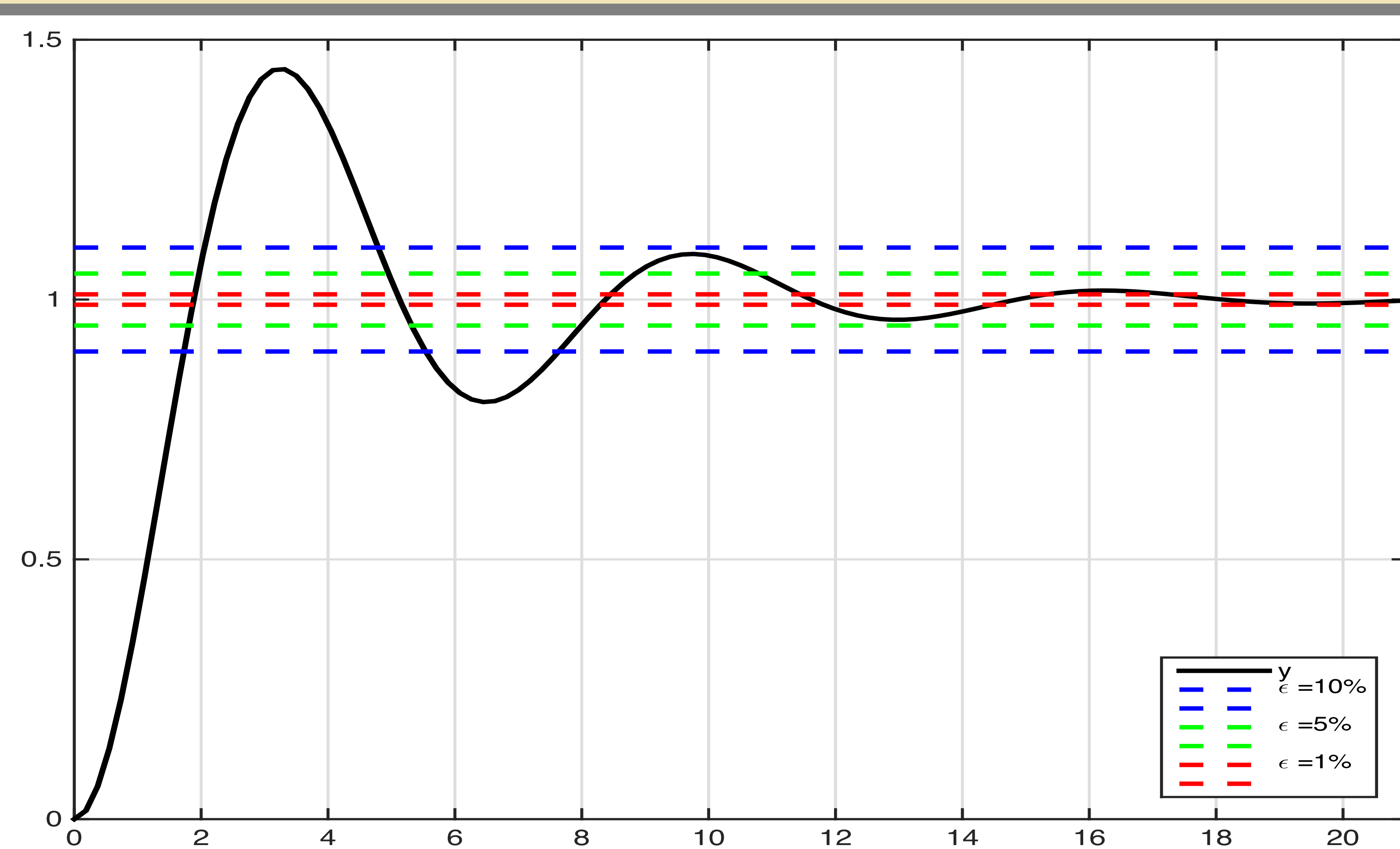
- Si consideri un Sistema Lineare Stazionario Asintoticamente Stabile.

$u(t) = U_0$	$y_\infty(t) = W(s)\|_{s=0} U_0$
$u(t) = U_0 \cdot t$	$y_\infty(t) = W(s)\|_{s=0} U_0 \cdot t + \frac{dW(s)}{ds}\|_{s=0} \cdot U_0$
$u(t) = U_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$	$y_\infty(t) = W(s)\|_{s=\lambda} U_0 e^{\lambda t}$
$\boxed{u(t) = U_0 \cdot sin(\omega t + \phi)}$	$\boxed{y_\infty(t) = U_0 \cdot \|W(s)\|_{s=j\omega} sin(\omega t + \phi + \alpha) \quad \alpha = \angle W(s)\|_{s=j\omega}}$

TEMPO DI ASSESTAMENTO

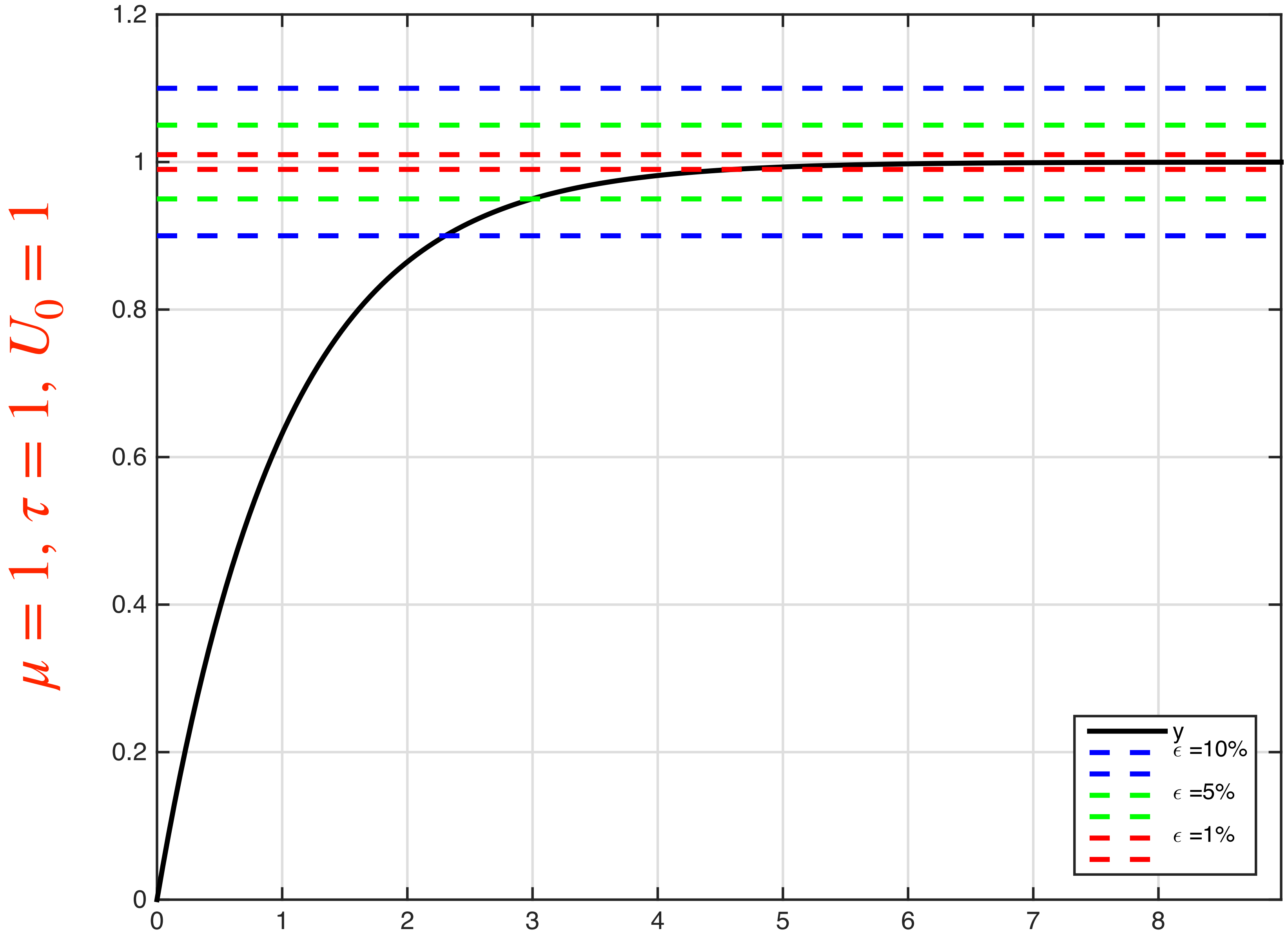
- Si consideri un Sistema SISO Lineare Stazionario **Asintoticamente Stabile** a guadagno positivo $W(s)|_{s=0} > 0$, forzato con un segnale di tipo gradino.
- Si definisce **Tempo di Assestamento all'epsilon percentuale** il tempo necessario affinchè

$$y_\infty(1 - 0.01 \cdot \epsilon) \leq y(t) \leq y_\infty(1 + 0.01 \cdot \epsilon)$$



SISTEMA PRIMO ORDINE

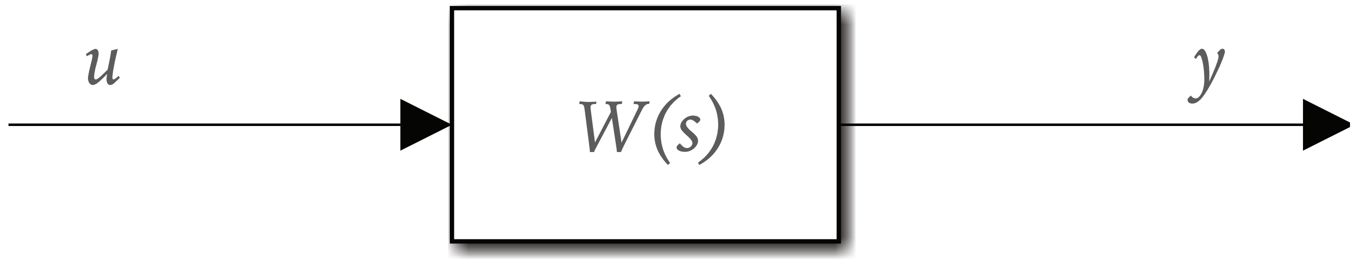
$W(s) = \dfrac{\mu}{1 + s\tau},\ \tau > 0$	$y(t) = U_0\mu\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) 1(t)$	$t_{a\epsilon} = -\tau \cdot ln(0.01 \cdot \epsilon)$



RISPOSTA
IN
FREQUENZA

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

- Si consideri un sistema SISO Asintoticamente Stabile



$$u(t) = U_0 \cdot sin(\omega t + \phi)$$

$$y_\infty(t) = U_0 \cdot |W(s)|_{s=j\omega} sin(\omega t + \phi + \angle W(s)|_{s=j\omega})$$

- Il numero complesso $W(j\omega)$ è detta risposta in frequenza del sistema con f.d.t $W(s)$

DEFINIZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA

Si consideri la forma fattorizzata di una generica f.d.t. W(s)

$$W(s)=\frac{\mu\prod_i\left(1+sT_i\right)^{z_i}\prod_h\left(\frac{s^2}{\omega_h^2}+\frac{2\xi_h s}{\omega_h}+1\right)^{z_h}}{s^g\prod_j\left(1+s\tau_j\right)^{z_j}\prod_k\left(\frac{s^2}{\omega_k^2}+\frac{2\xi_k s}{\omega_k}+1\right)^{z_k}}$$

a cui corrisponde la seguente risposta in frequenza W(jω)

$$W(j\omega)=\frac{\mu\prod_i\left(1+j\omega T_i\right)^{z_i}\prod_h\left(j\frac{2\xi_h\omega}{\omega_h}+1-\frac{\omega^2}{\omega_h^2}\right)^{z_h}}{(j\omega)^g\prod_j\left(1+j\omega\tau_j\right)^{z_j}\prod_k\left(j\frac{2\xi_k\omega}{\omega_k}+1-\frac{\omega^2}{\omega_k^2}\right)^{z_k}}$$

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

- Per i sistemi SISO la forma più usata per rappresentare graficamente la risposta in frequenza W(jω) associata alla funzione di trasferimento W(s) è quella dei **Digrammi di Bode**
- Essi sono costituiti da una coppia di curve che rappresentano in funzione della pulsazione il modulo è la fase di W
- Le due curve sono dette rispettivamente ***diagramma di Bode e del modulo*** e ***diagramma di Bode della fase***